
Algèbre linéaire avancée II
printemps 2025

Série 12 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Le *polynôme minimal* de A est le polynôme de degré minimal unitaire dans $\mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$ qui annule A .

1. Montrer qu'il existe et qu'il est bien unique.
2. Montrer qu'il divise tout polynôme annulant A et donc, en particulier, le polynôme caractéristique de A .

Solution. 1. Le théorème de Cayley-Hamilton implique que $p_A(A) = 0$ et donc que le polynôme minimal existe. Soient deux polynômes minimaux p et q de A . En particulier, ils sont unitaires, de même degré, et annulent A . Dès lors, $p - q$ est de degré strictement inférieur et annule également A . Il doit donc être le polynôme nul, et donc $p = q$, ce qui montre l'unicité.

2. Soit m_A le polynôme minimal de A et f un polynôme quelconque annulant A . La division euclidienne de f par m_A donne

$$f = m_A q + r,$$

où $\deg(r) < \deg(m_A)$. Or, en évaluant en A , on trouve $r(A) = 0$, et donc que r doit être le polynôme nul, par minimalité de m_A .

Exercice 2. Soit $T : \mathbb{C}^{12} \rightarrow \mathbb{C}^{12}$ un endomorphisme admettant pour polynômes caractéristique et minimal

$$p_T(x) = (x - 6)^4(x + 3)^6x^2, \quad m_T(x) = (x - 6)^2(x + 3)^3x.$$

Montrer qu'il n'existe que 6 tels endomorphismes à conjugaison par isomorphisme près ($\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ sont considérés comme la même application pour ϕ un automorphisme de $\mathbb{C}^{12}$).

Solution. Il s'agit ici de compter le nombre de formes normales de Jordan possibles, sans compter les permutations entre blocs.

Les blocs associés à la valeur 6 vérifient que : la somme de leurs tailles est 4 et le plus gros bloc est de taille 2. Les deux seules possibilités pour les tailles des blocs sont donc $4 = 2 + 2$ et $4 = 2 + 1 + 1$.

Similairement, les trois possibilités pour 3 sont : $6 = 3 + 1 + 1 + 1$, $6 = 3 + 2 + 1$, et $6 = 3 + 3$.

Il n'y a qu'une possibilité d'agencement des blocs associés à 0 ($2 = 1 + 1$), et donc le nombre de formes normales de Jordan différentes est $2 \times 3 \times 1 = 6$.

Exercice 3. Calculer les polynômes caractéristique et minimal de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 108 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -324 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 279 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -115 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont 1, 2, -3. En déduire sa forme normale de Jordan.

Solution. En développant par la dernière colonne, le polynôme caractéristique p_A de A est

$$p_A(\lambda) = \lambda^8 + 2\lambda^7 - 17\lambda^6 - 16\lambda^5 + 115\lambda^4 - 22\lambda^3 - 279\lambda^2 + 324\lambda - 108.$$

Des divisions successives par $\lambda - 1$ donnent le produit $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda^5 + 5\lambda^4 - 5\lambda^3 - 45\lambda^2 + 108)$, et de nouvelles divisions par $\lambda + 3$ et $\lambda - 2$ donnent $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda + 3)^3(\lambda - 2)^2$. Par conséquent, les valeurs 1, 2, et -3 ont pour multiplicité algébrique 3, 2 et 3 respectivement.

Pour connaître la décomposition de Jordan et le polynôme minimal, il s'agit d'abord de calculer la multiplicité géométrique de chaque valeur. Or on remarque immédiatement que $\text{rang}(A - \lambda I) = 7$ pour $\lambda = 1, 2, -3$, et donc que les multiplicités géométriques sont toutes 1. La forme de Jordan est donc composée de trois blocs diagonaux, chacun associé à une des valeurs propres. De plus, le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $Q(x) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3$.

- a) Trouver une matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ telle que $Q(x) = x^T A x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.
- b) Soit B la base canonique. Trouver une base $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$, telle que $Q(x) = [x]_{B'}^T D [x]_{B'}$ où D est une matrice diagonale.

Solution. a) *Le matrice A que l'on cherche est*

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 4 \\ -4 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

- b) *On commence par calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A . Le polynôme caractéristique de A est*

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (9 - \lambda)(7 - \lambda)(11 - \lambda) - 16(11 - \lambda) - 16(7 - \lambda) \\ &= -\lambda^3 + 27\lambda^2 - 207\lambda + 405 \\ &= -(\lambda - 15)(\lambda - 9)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

ainsi les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 15$, $\lambda_2 = 9$ et $\lambda_3 = 3$. Le premier vecteur propre satisfait $(A - \lambda_1 I)v_1 = 0$. On trouve $v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de la

même façon on obtient $v_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. La matrice $P_{B'B}$ qui satisfait $[x]_B = P_{B'B} [x]_{B'}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ est ainsi la matrice avec les colonnes v_1, v_2 et v_3 :

$$P_{B'B} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} Q(x) &= [x]_B^T A [x]_B \\ &= (P_{B'B} [x]_{B'})^T A (P_{B'B} [x]_{B'}) \\ &= [x]_{B'}^T P_{B'B}^T A P_{B'B} [x]_{B'} \\ &= [x]_{B'}^T D [x]_{B'}. \end{aligned}$$

où

$$D = (P_{B'B})^T A P_{B'B} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale.

Exercice 5. Soit $A \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ dont le polynôme caractéristique est $p_A(x) = -(x-1)^2(x-3)^3$. Les dimensions de l'image de $(A - \lambda I)$ sont 3 pour $\lambda = 1$ et 4 pour $\lambda = 3$. La forme normale de Jordan de la matrice A est

☐
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

☐
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

☐
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

Solution. Aucune des autres réponses n'est correcte.

Exercice 6. Soit $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ une matrice avec polynôme caractéristique

$$p_A(x) = (x-1)^5(x+1)^2(x-2)$$

et polynôme minimal

$$m_A(x) = (x-1)^2(x+1)(x-2).$$

Soit J la forme normale de Jordan de la matrice A . Alors

- ☐ J a au plus 4 blocs de Jordan pour la valeur propre 1.
- ☐ J a au plus 6 blocs de Jordan.
- ☐ J a un seul bloc de Jordan pour la valeur propre -1.
- ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

Solution. J a au plus 4 blocs de Jordan pour la valeur propre 1.

Exercice 7. Cet exercice propose un exemple d'un théorème du polycopié.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et $N : V \rightarrow V$ une application nilpotente. Soient $v_1, v_2, v_3 \in V$ et supposons que l'ensemble

$$v_1, Nv_1, N^2v_1, v_2, Nv_2, v_3, Nv_3, N^2v_3, N^3v_3$$

engendre l'espace V (les durées de vie des vecteurs v_1, v_2, v_3 sont $m_1 = 3$, $m_2 = 2$ et $m_3 = 4$).

On a une combinaison linéaire non-triviale

$$3v_1 + 2Nv_1 + N^2v_1 + v_2 + 2Nv_2 + \mu v_3 + Nv_3 + 2N^2v_3 + 8N^3v_3 = 0.$$

Quelle est la valeur de μ ? Par quel vecteur pourrions-nous remplacer v_1 selon l'algorithme de la preuve du théorème?

Solution. On a forcément $\mu = 0$ et l'algorithme dans la preuve du théorème propose de remplacer v_1 par $3v_1 + Nv_3$ car on a $N^2(3v_1 + Nv_3) = 3N^2v_1 + N^3v_3 = 0$.

Exercice 8. (*) En utilisant la forme normale de Jordan montrer que toute matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est semblable à sa transposée A^T .

Solution.