

1. Calculez $f(x) - g(x)$.

2. Vérifiez que

$$\text{id} = \frac{1}{2}(T \circ (T + \text{id}) - (T + 2\text{id}) \circ (T - \text{id})).$$

3. Dans la Remarque 8.7 est-ce que T doit forcément être un endomorphisme ou est-ce que la remarque est juste pour toute fonction $T : V \rightarrow V$?

Exercice 4. Donner la forme normale de Jordan J de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Le but de cet exercice est de montrer l'unicité de la forme normale de Jordan.

1. Considérons d'abord un bloc de Jordan $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ associé à la valeur propre λ . Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\text{rank}(B - \lambda I)^m = \max\{n - m, 0\}.$$

2. Considérons à présent une matrice J construite à partir de blocs de tailles $n_1 > n_2 > \dots > n_k$ et associés à la même valeur propre λ . Soit m_i le nombre de blocs de taille n_i . Montrer que

$$\text{rank}(J - \lambda I)^m = \sum_{i=1}^k m_i \max\{n_i - m, 0\}. \quad (1)$$

3. Montrer que si A and B sont semblables, alors $\text{rank}((A - \lambda I)^m) = \text{rank}((B - \lambda I)^m)$. Dédurre que si A and B sont semblables, et que si leur seule valeur propre est λ , alors leurs formes normales de Jordan sont identiques à ordre des blocs près.

Indice : évaluer (1) en $m = n_1, n_1 - 1, n_2, n_2 - 1, \dots$.

4. En considérant chaque valeur propre une à une, conclure de l'unicité de la forme normale de Jordan à ordre des blocs près.

Exercice 6. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

a) Si J est la forme normale de Jordan pour une matrice A , J^2 est la forme normale de Jordan pour A^2 .

b) Si A et B sont deux matrices $\in \mathbb{C}^{n \times n}$, les matrices AB et BA ont les mêmes formes normales de Jordan.

Exercice 7. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deux matrices semblables sur \mathbb{C} .

- Montrer que A et B sont aussi semblables sur \mathbb{R} .
- En déduire, à partir de l'unicité de la forme de Jordan, que deux matrices sont semblables sur \mathbb{R} si et seulement s'ils admettent la même forme normale de Jordan.

Exercice 8. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telle qu'il existe un $m \in \mathbb{N}$ vérifiant $A^m = I$. Montrer que A est inversible, expliciter ses valeurs propres, et en déduire que $\text{Tr}(A^{-1}) = \overline{\text{Tr}(A)}$.

Exercice 9. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & -5 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

et soit $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire associée à la matrice A . Trouver des sous-espaces $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ qui satisfont les conditions du Lemme 8.14, c'est-à-dire $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$, $T(V_i) \subseteq V_i$ et $T|_{V_i} = N_i + \lambda_i I$, où $N_i : V_i \rightarrow V_i$ est nilpotente, pour $i = 1, 2$.

Exercice 10. Soit $T : V \rightarrow V$ un endomorphisme et soit V_1, \dots, V_k une décomposition de V telle que $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$, $T(V_i) \subseteq V_i$ et $T|_{V_i} = N_i + \lambda_i I$, où $N_i : V_i \rightarrow V_i$ est nilpotente et les valeurs $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ sont distinctes. Montrer que

- $V_i = \ker(T - \lambda_i I)^{a_i}$ pour un entier a_i tel que $N_i^{a_i} = 0$.
Indice pour l'inclusion \supseteq : les polynômes $(x - \lambda_i)^{a_i}$ et $(x - \lambda_j)^{a_j}$ sont premiers entre eux lorsque $i \neq j$.
- Les $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont des valeurs propres de T .
- Le polynôme $f(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{a_i}$ annule T .
Indice : montrer que $f(T)(v) = 0$ pour tout $v \in V$ en utilisant la décomposition de V et le premier point.
- En déduire que l'ensemble $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ contient toutes les valeurs propres de T .
Indice : si $v \neq 0$ est un vecteur propre de T de valeur propre λ , exprimer $f(T)(v)$ en fonction de f , λ , et v .
- Conclure que les valeurs sur la diagonale de n'importe quelle forme normale de Jordan de T constituent l'ensemble des valeurs propres de T .

Exercice 11. Soit $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice formée par des blocs de Jordan ayant chacun la même valeur λ sur la diagonale. Montrer que

- Le polynôme caractéristique de M est $p_M(t) = (\lambda - t)^n$.

- b) Le polynôme minimal de M est $m_M(t) = (t - \lambda)^k$, où k est la taille du plus gros bloc de Jordan.

En déduire, à l'aide d'un autre exercice de la série, que le polynôme minimal d'une matrice générale est $\prod_{i=1}^r (t - \lambda_i)^{k_i}$, si et seulement si la taille du plus gros bloc de Jordan associé à la valeur λ_i est k_i pour tout $i = 1, \dots, r$.

Exercice 12. (*) Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et soient J une forme normale de Jordan de A , P la matrice de passage associée ($A = PJP^{-1}$).

1. Soient B_1, \dots, B_k l'ensemble des blocs de J associés à une même valeur propre λ .
Montrer que $\dim \operatorname{Im}(J - \lambda I) = n - k$.
2. En déduire que le nombre de blocs de J associés à une valeur propre λ est égal à sa multiplicité géométrique $\dim \ker(A - \lambda I)$.
3. Montrer que si A est diagonalisable, chaque bloc de Jordan est de taille 1 et la décomposition $A = PJP^{-1}$ est exactement sa diagonalisation.