

**Algèbre linéaire avancée II**  
printemps 2025

**Série 12**

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (\*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (\*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (\*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (\*) sera une question ouverte de l'examen final.

**Exercice 1.** (+) Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Le *polynôme minimal* de  $A$  est le polynôme de degré minimal unitaire dans  $\mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$  qui annule  $A$ .

1. Montrer qu'il existe et qu'il est bien unique.
2. Montrer qu'il divise tout polynôme annulant  $A$  et donc, en particulier, le polynôme caractéristique de  $A$ .

**Exercice 2.** Soit  $T : \mathbb{C}^{12} \rightarrow \mathbb{C}^{12}$  un endomorphisme admettant pour polynômes caractéristique et minimal

$$p_T(x) = (x - 6)^4(x + 3)^6x^2, \quad m_T(x) = (x - 6)^2(x + 3)^3x.$$

Montrer qu'il n'existe que 6 tels endomorphismes à conjugaison par isomorphisme près ( $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$  sont considérés comme la même application pour  $\phi$  un automorphisme de  $\mathbb{C}^{12}$ ).

**Exercice 3.** Calculer les polynômes caractéristique et minimal de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 108 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -324 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 279 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -115 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont 1, 2, -3. En déduire sa forme normale de Jordan.

**Exercice 4.** Soit  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une application telle que  $Q(x) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3$ .

- a) Trouver une matrice symétrique  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  telle que  $Q(x) = x^T A x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ .
- b) Soit  $B$  la base canonique. Trouver une base  $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ , telle que  $Q(x) = [x]_{B'}^T D [x]_{B'}$  où  $D$  est une matrice diagonale.

**Exercice 5.** Soit  $A \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$  dont le polynôme caractéristique est  $p_A(x) = -(x-1)^2(x-3)^3$ . Les dimensions de l'image de  $(A - \lambda I)$  sont 3 pour  $\lambda = 1$  et 4 pour  $\lambda = 3$ . La forme normale de Jordan de la matrice  $A$  est

☐ 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

☐ 
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

☐ 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$$

☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

**Exercice 6.** Soit  $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$  une matrice avec polynôme caractéristique

$$p_A(x) = (x-1)^5(x+1)^2(x-2)$$

et polynôme minimal

$$m_A(x) = (x-1)^2(x+1)(x-2).$$

Soit  $J$  la forme normale de Jordan de la matrice  $A$ . Alors

- ☐  $J$  a au plus 4 blocs de Jordan pour la valeur propre 1.
- ☐  $J$  a au plus 6 blocs de Jordan.
- ☐  $J$  a un seul bloc de Jordan pour la valeur propre -1.
- ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

**Exercice 7.** Cet exercice propose un exemple d'un théorème du polycopié.

Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{C}$  et  $N : V \rightarrow V$  une application nilpotente. Soient  $v_1, v_2, v_3 \in V$  et supposons que l'ensemble

$$v_1, Nv_1, N^2v_1, v_2, Nv_2, v_3, Nv_3, N^2v_3, N^3v_3$$

engendre l'espace  $V$  (les durées de vie des vecteurs  $v_1, v_2, v_3$  sont  $m_1 = 3$ ,  $m_2 = 2$  et  $m_3 = 4$ ).

On a une combinaison linéaire non-triviale

$$3v_1 + 2Nv_1 + N^2v_1 + v_2 + 2Nv_2 + \mu v_3 + Nv_3 + 2N^2v_3 + 8N^3v_3 = 0.$$

Quelle est la valeur de  $\mu$ ? Par quel vecteur pourrions-nous remplacer  $v_1$  selon l'algorithme de la preuve du théorème?

**Exercice 8.** (\*) En utilisant la forme normale de Jordan montrer que toute matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  est semblable à sa transposée  $A^T$ .