Prof. Friedrich Eisenbrand 17 mai 2024

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2024

Série 12

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Posons le *polynôme minimal de A* le polynôme de degré minimal de $\mathbb{C}[x] \setminus \{0\}$ unitaire et qui annule A.

1. Montrer qu'il existe et qu'il est bien unique.
2. Montrer qu'il divise tout polynôme annulant A et donc, en particulier, le polynôme caractéristique de A.

Exercice 2. Soit $T : \mathbb{C}^{12} \to \mathbb{C}^{12}$ un endormorphisme admettant pour polynômes caractéristique et minimal

$$p_T(x) = (x-6)^4(x+3)^6x^2, \qquad m_T(x) = (x-6)^2(x+3)^3x.$$

Montrer qu'il n'existe que 6 tels endormorphismes à conjugaison par isomorphisme près ($\phi \circ f \circ \phi^{-1}$ sont considérés comme la même application pour ϕ un automorphisme de $\mathbb{C}^{12}$).

Exercice 3. Calculer les polynômes caractéristique et minimal de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 108 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -324 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 279 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -115 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $1, 2, -3$. En déduire sa forme normale de Jordan.

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ un bloc de Jordan avec λ sur la diagonale. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. Montrer que

$$(e^{tA}x)_i = \sum_{j=i}^{n} \frac{x_j t^{j-i}}{(j-i)!} e^{\lambda t}.$$

Exercice 5. Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une application telle que $Q(x) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3$.

a) Trouver une matrice symétrique $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ telle que $Q(x) = x^T Ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

b) Soit B la base canonique. Trouver une base $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$, telle que $Q(x) = [x]_{B'}^T D[x]_{B'}$ où D est une matrice diagonale.

Exercice 6. Soit $A \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ dont le polynôme caractéristique est $p_A(x) = -(x-1)^2(x-3)^3$. Les dimensions de l'image de $(A - \lambda I)$ sont 3 pour $\lambda = 1$ et 4 pour $\lambda = 3$. La forme normale de Jordan de la matrice A est

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}$
- ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

Exercice 7. Soit $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ une matrice avec polynôme caractéristique

$$p_A(x) = (x-1)^5(x+1)^2(x-2)$$

et polynôme minimal

$$m_A(x) = (x-1)^2(x+1)(x-2).$$

Soit J la forme normale de Jordan de la matrice A. Alors

- ☐ J a au plus 4 blocs de Jordan pour la valeur propre 1.
- ☐ J a au plus 6 blocs de Jordan.
- ☐ J a un seul bloc de Jordan pour la valeur propre -1.
- ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

Exercice 8. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $A^3 = A$. Alors on a que

- ☐ $e^{tA} = I_n + A\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} + A^2\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^{2i}}{(2i)!} - A^2$.
- ☐ $e^{tA} = I_n + A\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} + A^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^{2i}}{(2i)!}$.
- ☐ $e^{tA} = I_n + A\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} + A^2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{t^{2i}}{(2i)!} + A^2$.
- ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

Exercice 9. Cet exercice propose un exemple du théorème 7.9. du polycopié.
Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et $N : V \to V$ une application nilpotente. Soient $v_1, v_2, v_3 \in V$ et supposons que l'ensemble

$$v_1, Nv_1, N^2v_1, v_2, Nv_2, v_3, Nv_3, N^2v_3, N^3v_3$$

engendre l'espace V (les durées de vie des vecteurs v_1, v_2, v_3 sont $m_1 = 3$, $m_2 = 2$ et $m_3 = 4$).
On a une combinasion linéaire non-triviale

$$3v_1 + 2Nv_1 + N^2v_1 + v_2 + 2Nv_2 + \mu v_3 + Nv_3 + 2N^2v_3 + 8N^3v_3 = 0.$$

Quelle est la valeur de μ? Par quel vecteur pourrions-nous remplacer v_1 selon l'algorithme de la preuve du théorème 7.9.?

Exercice 10. Trouver toutes les solutions entières de

$$Ax = b_1,\text{ où } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 4 & 10 & 2 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{Z}^3 \text{ et } b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

et de

$$Bx = b_2,\text{ où } B = \begin{pmatrix} 8 & -7 & -10 \\ -6 & 15 & 12 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{Z}^3 \text{ et } b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Exercice 11. (*) En utilisant la forme normale de Jordan montrer que toute matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est semblable à sa transposée A^T.