

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2026

Série 11 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Trouver e^{tA} pour chacune des matrices suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ où $x, y \in \mathbb{C}$.

b) Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ qui satisfait $A^2 = A$.

Solution.

a) $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ où $x, y \in \mathbb{C}$. Pour chaque nombre entier $k \geq 0$, on a

$$(tA)^k = \begin{pmatrix} (tx)^k & 0 \\ 0 & (ty)^k \end{pmatrix}.$$

Donc, on peut calculer e^{tA} comme

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tA)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} (tx)^k & 0 \\ 0 & (ty)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ty)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{tx} & 0 \\ 0 & e^{ty} \end{pmatrix}.$$

b) Si $A^2 = A$ alors $(tA)^k = t^k A$ pour tout nombre entier $k \geq 1$, donc

$$e^{tA} = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} A^i = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^i}{i!} A = I + (e^t - 1)A.$$

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $A^3 = A$. Alors on a que

- $e^{tA} = I_n + A \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} + A^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!} - A^2.$
- $e^{tA} = I_n + A \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} + A^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!}.$
- $e^{tA} = I_n + A \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} + A^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!} + A^2.$
- Aucune des autres réponses n'est correcte.

Solution. $e^{tA} = I_n + A \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} + A^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!} - A^2$.

Exercice 3. Il s'agit d'un lemme du polycopié.

On considère le système suivant

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_1(t) &= a_{11}\mathbf{x}_1(t) + \cdots + a_{1n}\mathbf{x}_n(t) \\ \mathbf{x}'_2(t) &= a_{21}\mathbf{x}_1(t) + \cdots + a_{2n}\mathbf{x}_n(t) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}'_n(t) &= a_{n1}\mathbf{x}_1(t) + \cdots + a_{nn}\mathbf{x}_n(t) \end{aligned} \tag{1}$$

où les $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \text{ est une solution du système (1)}\}$$

est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Solution. Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de système (1). Car $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, on a $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t)$ et le même pour \mathbf{y} . Donc,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y})(t) &= \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) + \alpha \frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) \\ &= A\mathbf{x}(t) + \alpha A\mathbf{y}(t) \\ &= A(\mathbf{x}(t) + \alpha\mathbf{y}(t)). \end{aligned}$$

Ainsi, \mathcal{X} est stable sous l'addition et la multiplication par un scalaire. Les autres propriétés découlent du fait que \mathcal{X} est un sous-ensemble de l'espace des fonctions différentiables $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Montrer que $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$.

Solution. Par définition, on a

$$e^{tA} = I + At + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \cdots$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{At} &= 0 + A + \frac{1}{2!}2tA^2 + \frac{1}{3!}3t^2A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}nt^{n-1}A^n + \cdots \\ &= 0 + A + \frac{1}{1!}tA^2 + \frac{1}{2!}t^2A^3 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}A^n + \cdots \\ &= A(I + At + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}t^nA^n + \cdots) \\ &= Ae^{At}. \end{aligned}$$

On peut aussi voir que

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j A^j}{j!}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j t^{j-1} A^j}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j-1} A^j}{(j-1)!} = A \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{j-1} A^{j-1}}{(j-1)!} = A \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j A^j}{(j)!} = Ae^{At}.$$

Exercice 5. Soient $A, B, P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telles que P est inversible et $A = P^{-1}BP$. Montrer que $e^A = P^{-1}e^B P$.

Solution. Par définition,

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Or, comme $PP^{-1} = I$, on a

$$A^k = (P^{-1}BP)^k = \underbrace{P^{-1}BPP^{-1}BP \dots P^{-1}BP}_{k \text{ fois}} = P^{-1}B^k P,$$

donc

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} P^{-1}B^k P = P^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \right) P = P^{-1}e^B P,$$

où on peut échanger l'ordre de la multiplication et de l'addition car la somme converge.

Exercice 6. Montrer que $e^{A+B} = e^A e^B$ si $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ commutent. En déduire que e^\bullet est une application de $\mathbb{C}^{n \times n}$ vers $\text{GL}_n(\mathbb{C})$.

Trouver deux matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telles que $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

Solution.

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{k!m!} A^k B^m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} B^m = e^A e^B. \end{aligned}$$

Pour $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$, on vérifie facilement que l'inverse de e^C est donné par la matrice e^{-C} .

Pour répondre à la dernière question de l'énoncé on prend

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on calcule

$$e^A e^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$e^{A+B} = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Trouver la solution du système $x' = Ax$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Solution. La solution du système est

$$e^{tA}x(0)$$

Alors, il faut trouver e^{tA} . Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On peut écrire

$$A = 2I_2 + N$$

Comme les deux matrices $2I_2$ et N commutent, on peut utiliser $e^A = e^{2I_2}e^N$. Maintenant, on voit que $N^2 = 0$ alors $e^{tN} = I + tN$ et on trouve que

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

et la solution est donnée par

$$\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} + 2te^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Considérons l'équation différentielle de second ordre où $\lambda > 0$ et $u \in C^2(\mathbb{R})$.

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \\ u(0) = \alpha \text{ et } u'(0) = \beta. \end{cases} \quad (2)$$

1. Reformuler le problème en une équation en dimension 2 de la forme $x' = Ax$ avec $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.
2. Calculer e^{At} et en déduire la solution u du problème initial (2).

Formules : $\cos(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$ et $\sin(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

Solution. 1. On pose $x(t) := \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}$. Alors, clairement, $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. De surcroît,

$$x'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ u''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} x(t) = Ax(t),$$

où on définit $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$.

2. On sait d'après le cours que l'unique solution du système est $x(t) = e^{tA}x(0)$. Il s'agit donc de calculer $e^{tA} = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} A^k$, et donc les puissances de la matrice A .

Remarquons d'abord que $A^2 = -\lambda I$. Par suite, on a

$$A^{2k} = (-\lambda)^k I, \quad A^{2k+1} = (-\lambda)^k A.$$

Ceci nous pousse à scinder la somme en indices pairs et impairs. Les indices pairs donnent

$$\sum_{k \geq 0} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^{2k} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{(\sqrt{\lambda}t)^{2k}}{(2k)!} I = \cos(\sqrt{\lambda}t)I.$$

Parallèlement, les indices impairs donnent

$$\sum_{k \geq 0} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A^{2k+1} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{(\sqrt{\lambda}t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} A = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}t A.$$

Par conséquent, on a

$$e^{tA} = \cos(\sqrt{\lambda}t)I + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda}t A = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}t) & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}t) \\ -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}t & \cos(\sqrt{\lambda}t) \end{pmatrix}.$$

Finalement, les relations $x(t) = e^{tA}x(0)$ et $u = x_1$ concluent :

$$u(t) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda}t) + \frac{\beta}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}t).$$

On contrôlera que u vérifie bien l'équation différentielle ainsi que les conditions initiales.

Exercice 9. Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. Trouver e^{tA} pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Utiliser ceci pour trouver la solution du système $x' = Bx$ où

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Solution. Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - a)^2 + b^2 = (\lambda - a - ib)(\lambda - a + ib),$$

ainsi les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = a - ib$ et $\lambda_2 = a + ib$, et $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ sont les vecteurs propres correspondants. Donc $P^{-1}AP = D$, où

$P = (v_1 \ v_2)$ et $D = \begin{pmatrix} a - bi & 0 \\ 0 & a + bi \end{pmatrix}$, et on a

$$\begin{aligned} e^{tA} &= P e^{tD} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(a-ib)t} & 0 \\ 0 & e^{(a+ib)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{at} (e^{-ibt} + e^{ibt}) & \frac{i}{2} e^{at} (e^{-ibt} - e^{ibt}) \\ \frac{i}{2} e^{at} (-e^{-ibt} + e^{ibt}) & \frac{1}{2} e^{at} (e^{-ibt} + e^{ibt}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{at} \cos(bt) & e^{at} \sin(bt) \\ -e^{at} \sin(bt) & e^{at} \cos(bt) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Maintenant, $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$, alors par la partie précédente, on a que

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{2t} \cos(5t) & e^{2t} \sin(5t) \\ -e^{2t} \sin(5t) & e^{2t} \cos(5t) \end{pmatrix}.$$

Ainsi la solution au système d'équations est

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} (\cos(5t) + \sin(5t)) \\ e^{2t} (-\sin(5t) + \cos(5t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}.$$

Pour les conditions initiales $x_1(0) = 2$ et $x_2(0) = -1$, on obtient

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{2t} (2 \cos(5t) - \sin(5t)) \\ x_2(t) &= e^{2t} (-\cos(5t) - 2 \sin(5t)). \end{aligned}$$

Exercice 10. On considère un système différentiel $x' = Ax$ et on suppose que A est une matrice nilpotente, si bien que $A^m = 0$ pour un certain entier $m > 0$. Montrer que pour une solution

$$x(t) = (x_1(t) \ \cdots \ x_n(t))^T$$

chaque fonction $x_i(t)$ est un polynôme en t et qu'il est de degré au plus $m - 1$.

Solution. On propose deux méthodes. La première consiste à dériver m fois. Comme $\dot{x}(t) = Ax$, on a $\ddot{x}(t) = A\dot{x}(t) = AAx(t) = A^2x(t)$. Par récurrence, la dérivée k -ème, notée $x^{(k)}(t)$, satisfait $x^{(k)}(t) = A^kx(t)$. Par conséquent, $x^{(m)}(t) = A^m x(t) = 0$, et donc $x_i^{(m)}(t) = 0$, pour $1 \leq i \leq n$. Cela force $x_i(t)$ à être un polynôme de degré au plus $m - 1$.

L'autre méthode consiste à utiliser la résolution à l'aide de l'exponentielle. Comme $A^m = 0$, on trouve

$$\exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tA)^k = I_2 + tA + \frac{1}{2} t^2 A^2 + \dots + \frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} A^{m-1}.$$

Donc, si $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ sont des constantes, la solution est

$$x(t) = \exp(tA) \cdot c = c + tAc + \frac{1}{2} t^2 A^2 c + \dots + \frac{1}{(m-1)!} t^{m-1} A^{m-1} c.$$

Cela implique clairement que chaque $x_i(t)$ est un polynôme en t de degré au plus $m - 1$.

Exercice 11. (*) Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ inversible. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^m est diagonalisable pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$.

Donner un contre-exemple lorsque A n'est pas inversible.

Solution.