Algèbre linéaire avancée II
printemps 2025

Série 11

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Synthèse des résultats sur la forme normale de Jordan.

Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice et $J \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sa forme normale de Jordan. Appelons un bloc de Jordan ayant λ sur sa diagonale un bloc *associé* à λ. Alors

1. Les blocs de J sont associés aux valeurs propres de A.
2. La somme des tailles des blocs associés à la même valeur λ est égale à la multiplicité algébrique de λ.
3. Le nombre de blocs associés à la même valeur λ est égal à la multiplicité géométrique de λ.
4. La taille du plus gros bloc de Jordan associé à λ est égale à la multiplicité de λ dans le polynôme minimal de A.
5. La forme normale de Jordan est unique à ordre des blocs près.

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Montrer, à l'aide de l'exercice précédent, que A est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal n'admet que des racines simples (c'est-à-dire leur multiplicité est 1).

En déduire que si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ vérifie $A^3 = A$, alors A est diagonalisable.

Exercice 3. Cet exercice concerne la Remarque 7.7 des notes du cours. Soient V un espace vectoriel, $T : V \to V$ un endomorphisme et $f(x) = x(x+1)$, $g(x) = (x+2)(x-1)$.

1. Calculez $f(x) - g(x)$.
2. Vérifiez que
$$\mathrm{id} = \frac{1}{2}(T \circ (T + \mathrm{id}) - (T + 2\mathrm{id}) \circ (T - \mathrm{id})).$$

3. Dans la Remarque 7.7 est-ce que T doit forcément être un endomorphisme ou est-ce que la remarque est juste pour toute fonction $T : V \to V$?

Exercice 4. Relire et compléter la preuve du théorème de Jordan.

1. Montrer que les orbites de
$$x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_\ell$$
engendrent encore V (cf. la démonstration du théorème de Jordan pour leur définition).

2. Pourquoi applique-t-on N à la combinaison linéaire autant de fois que possible ? Si $k \geq 2$, trouver à quoi ressemble la combinaison linéaire et le vecteur y' qui remplace x_i si on applique N seulement $k-1$ fois. Argumenter, dans ce cas, que y' a une durée de vie inférieure à y, mais que les orbites ne génèrent pas forcément le même espace.

3. Montrer que si $m = \min_{j \in J} m_j - 1 = 0$, et donc qu'aucun progrès n'est réalisé dans le cas 2, le cas 1 s'applique : il existe un i tel que $Nx_i = 0$, et tel que le coefficient devant x_i dans la combinaison linéaire est non nul.

Exercice 5. Donner la forme normale de Jordan J de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \\ -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Le but de cet exercice est de montrer l'unicité de la forme normale de Jordan.

1. Considérons d'abord un bloc de Jordan $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ associé à la valeur propre λ. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,
$$\operatorname{rank}(B - \lambda I)^m = \max\{n - m, 0\}.$$

2. Considérons à présent une matrice J construite à partir de blocs de tailles $n_1 > n_2 > \cdots > n_k$ et associés à la même valeur propre λ. Soit m_i le nombre de blocs de taille n_i. Montrer que
$$\operatorname{rank}(J - \lambda I)^m = \sum_{i=1}^{k} m_i \max\{n_i - m, 0\}. \tag{1}$$

3. Montrer que si A and B sont semblables, alors $\operatorname{rank}((A-\lambda I)^m) = \operatorname{rank}((B-\lambda I)^m)$. Déduire que si A and B sont semblables, et que si leur seule valeur propre est λ, alors leurs formes normales de Jordan sont identiques à ordre des blocs près.

   Indice : évaluer (1) en $m = n_1, n_1 - 1, n_2, n_2 - 1, \dots$.

4. En considérant chaque valeur propre une à une, conclure de l'unicité de la forme normale de Jordan à ordre des blocs près.

Exercice 7. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

a) Si J est la forme normale de Jordan pour une matrice A, J^2 est la forme normale de Jordan pour A^2.

b) Si A et B sont deux matrices $\in \mathbb{C}^{n\times n}$, les matrices AB et BA ont les mêmes formes normales de Jordan.

Exercice 8. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ deux matrices sembables sur $\mathbb{C}$.

a) Montrer que A et B sont aussi semblables sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire, à partir de l'unicité de la forme de Jordan (exercice 5), que deux matrices sont semblables sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'ils admettent la même forme normale de Jordan.

Exercice 9. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telle qu'il existe un $m \in \mathbb{N}$ vérifiant $A^m = I$. Montrer que A est inversible, expliciter ses valeurs propres, et en déduire que $\mathrm{Tr}(A^{-1}) = \overline{\mathrm{Tr}(A)}$.

Exercice 10. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & -5 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Soit $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire associée à cette matrice A. Trouver des sous-espaces $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ qui satisfont les conditions du Lemme 6.15., c'est-à-dire $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$, $T(V_i) \subseteq V_i$ et $T_{|V_i} = N_i + \lambda_i I$, où $N_i \colon V_i \to V_i$ est nilpotente, pour $i = 1, 2$.

Exercice 11. Soit $T \colon V \to V$ un endomorphisme et soit $V_1, ..., V_k$ une décomposition de V telle que $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, $T(V_i) \subseteq V_i$ et $T_{|V_i} = N_i + \lambda_i I$, où $N_i : V_i \to V_i$ est nilpotente et les valeurs $\{\lambda_i\}_{i=1}^k$ sont distinctes. Montrer que

a) $V_i = \ker(T - \lambda_i I)^{a_i}$ pour un entier a_i tel que $N_i^{a_i} = 0$.

Indice pour l'inclusion $\supseteq$: les polynômes $(x - \lambda_i)^{a_i}$ et $(x - \lambda_j)^{a_j}$ sont premiers entre eux lorsque $i \neq j$.

b) Les $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sont des valeurs propres de T.

c) Le polynôme $f(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{a_i}$ annule T.

Indice : montrer que $f(T)(v) = 0$ pour tout $v \in V$ en utilisant la décomposition de V et le premier point.

d) En déduire que l'ensemble $\{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ contient toutes les valeurs propres de T
Indice : si $v \neq 0$ est un vecteur propre de T de valeur propre λ, exprimer $f(T)(v)$ en fonction de f, λ, et v.

e) Conclure que les valeurs sur la diagonale de n'importe quelle forme normale de Jordan de T constituent l'ensemble des valeurs propres de T.

Exercice 12. Soit $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice formée par des blocs de Jordan ayant chacun la même valeur λ sur la diagonale. Montrer que

a) Le polynôme caractéristique de M est $p_M(t) = (\lambda - t)^n$.

b) Le polynôme minimal de M est $m_M(t) = (t - \lambda)^k$, où k est la taille du plus gros bloc de Jordan.

En déduire, à l'aide d'un autre exercice de la série, que le polynôme minimal d'une matrice générale est $\prod_{i=1}^{r}(t - \lambda_i)^{k_i}$, si et seulement si la taille du plus gros bloc de Jordan associé à la valeur λ_i est k_i pour tout $i = 1, \ldots, r$.

Exercice 13. (*) Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et soient J une forme normale de Jordan de A, P la matrice de passage associée ($A = PJP^{-1}$).

1. Soient $B_1, ..., B_k$ l'ensemble des blocs de J associés à une même valeur propre λ. Montrer que $\dim \mathrm{Im}(J - \lambda I) = n - k$.

2. En déduire que le nombre de blocs de J associés à une valeur propre λ est égal à sa multiplicité géométrique $\dim \ker(A - \lambda I)$.

3. Montrer que si A est diagonalisable, chaque bloc de Jordan est de taille 1 et la décomposition $A = PJP^{-1}$ est exactement sa diagonalisation.