Prof. Friedrich Eisenbrand 8 mai 2026

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2026

Série 11

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Trouver e^{tA} pour chacune des matrices suivantes :

a) $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ où $x, y \in \mathbb{C}$.

b) Une matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ qui satisfait $A^2 = A$.

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $A^3 = A$. Alors on a que

- ☐ $e^{tA} = I_n + A \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} + A^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!} - A^2$.
- ☐ $e^{tA} = I_n + A \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} + A^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!}$.
- ☐ $e^{tA} = I_n + A \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!} + A^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!} + A^2$.
- ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

Exercice 3. Il s'agit d'un lemme du polycopié.

On considère le système suivant

$$\begin{array}{rcrcr} \mathrm{x}_1'(t) & = & a_{11}\mathrm{x}_1(t) & + \cdots + & a_{1n}\mathrm{x}_n(t) \\ \mathrm{x}_2'(t) & = & a_{21}\mathrm{x}_1(t) & + \cdots + & a_{2n}\mathrm{x}_n(t) \\ & \vdots & & & \\ \mathrm{x}_n'(t) & = & a_{n1}\mathrm{x}_1(t) & + \cdots + & a_{nn}\mathrm{x}_n(t) \end{array} \tag{1}$$

où les $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble

$$\mathscr{X} = \{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \text{ est une solution du système (1)}\}$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Montrer que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{At} = Ae^{At}$.

Exercice 5. Soient $A, B, P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telles que P est inversible et $A = P^{-1}BP$. Montrer que $e^A = P^{-1}e^BP$.

Exercice 6. Montrer que $e^{A+B} = e^Ae^B$ si $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ commutent. En déduire que $e^\bullet$ est une application de $\mathbb{C}^{n\times n}$ vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Trouver deux matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telles que $e^{A+B} \neq e^Ae^B$.

Exercice 7. Trouver la solution du système $x' = Ax$ où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Considérons l'équation différentielle de second ordre où $\lambda > 0$ et $u \in C^2(\mathbb{R})$.

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \\ u(0) = \alpha \text{ et } u'(0) = \beta. \end{cases} \tag{2}$$

1. Reformuler le problème en une équation en dimension 2 de la forme $x' = Ax$ avec $x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.
2. Calculer e^{At} et en déduire la solution u du problème initial (2).

Formules : $\cos(x) = \sum\limits_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$ et $\sin(x) = \sum\limits_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$

Exercice 9. Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$. Trouver e^{tA} pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Utiliser ceci pour trouver la solution du système $x' = Bx$ où

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. On considère un système différentiel $x' = Ax$ et on suppose que A est une matrice nilpotente, si bien que $A^m = 0$ pour un certain entier $m > 0$. Montrer que pour une solution

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \cdots & x_n(t) \end{pmatrix}^T$$

chaque fonction $x_i(t)$ est un polynôme en t et qu'il est de degré au plus $m - 1$.

Exercice 11. (*) Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^m est diagonalisable pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$.

Donner un contre-exemple lorsque A n'est pas inversible.

Pour la résolution de cet exercice, vous pouvez admettre le résultat suivant : une matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal ne possède que des racines simples (c'est-à-dire de multiplicité 1). Ce résultat sera démontré à partir du théorème de Jordan, qui constitue l'objectif des deux semaines à venir.