Algèbre linéaire avancée II
printemps 2026

Série 10 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soient $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$. On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = ||Ax - b||^2.$$

Calculer le gradient de f et en déduire qu'une solution optimale du problème des moindres carrés est aussi solution de l'équation $A^T Ax = A^T b$.

Solution. *Un calcul direct montre que le gradient de f est donné par $2A^T Ax - 2A^T b$. On conclut par un théorème d'Analyse II.*

Exercice 2. Trouver, à l'aide de la pseudo-inverse, la solution minimale des trois systèmes d'équations:

$$1. \quad x_1 + x_2 = b_1 \qquad 2. \quad \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_1 = b_2 \\ x_1 = b_3 \end{cases} \qquad 3. \quad \begin{cases} 4x_1 = b_1 \\ 0x_1 = b_2 \\ 7x_3 = b_3 \\ 0x_2 = b_4 \, . \end{cases}$$

Solution. *Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. La solution minimale du système $Ax = b$, est donnée par $x^+ = A^+ b$. Elle satisfait $||Ax^+ - b||_2 \leq ||Ax - b||_2$, $\forall x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.*

1. *La matrice associée au premier système est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

On peut trouver une décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$. On trouve

$$P = 1 \, , \; D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \, , \; Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Donc on a

$$A^+ = Q^* D^+ P^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$x^+ = A^+ b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \end{pmatrix} .$$

2. La matrice associée au deuxième système est

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

On peut trouver une décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$. On trouve

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} , \; D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \; Q = 1 .$$

Donc on a

$$A^+ = Q^* D^+ P^* = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$x^+ = A^+ b = \frac{1}{3}(b_1 + b_2 + b_3) .$$

3. La matrice associée au troisième système est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

On peut trouver une décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$. On trouve

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \; D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \; Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Donc on a

$$A^+ = Q^* D^+ P^* = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$x^+ = A^+ b = \begin{pmatrix} b_1/4 \\ 0 \\ b_3/7 \end{pmatrix} .$$

Exercice 3. Soit $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Montrer que $||Ax||_2 \leq ||A||_F||x||_2$, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$. En déduire que $||AB||_F \leq ||A||_F||B||_F$.

Solution. *Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et soit $x \in \mathbb{C}^n$. On commence par montrer que*

$$||Ax||_2 \leq ||A||_F||x||_2.$$

Soient $A_1, \cdots, A_n$ les lignes de A. On a

$$\begin{aligned}
||Ax||_2 &= \left\| \begin{pmatrix} A_1x \\ \vdots \\ A_nx \end{pmatrix} \right\|_2 \\
&= \sqrt{\langle A_1^\intercal, x\rangle^2 + \cdots + \langle A_n^\intercal, x\rangle^2} \\
&\leq \sqrt{||A_1||_2^2||x||_2^2 + \cdots + ||A_n||_2^2||x||_2^2} \\
&= \sqrt{||A_1||_2^2 + \cdots + ||A_n||_2^2}||x||_2 \\
&= ||A||_F||x||_2,
\end{aligned}$$

où l'inégalité découle de Cauchy-Schwarz.

Soit $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et soient $b_1, \cdots, b_n$ les colonnes de la matrice B. Alors

$$\begin{aligned}
||AB||_F &= \left\| \begin{pmatrix} Ab_1 & \cdots & Ab_n \end{pmatrix} \right\|_F \\
&= \sqrt{||Ab_1||_2^2 + \cdots + ||Ab_n||_2^2} \\
&\leq \sqrt{||A||_F^2||b_1||_2^2 + \cdots + ||A||_F^2||b_n||_2^2} \quad \textit{par la première partie} \\
&= ||A||_F\sqrt{||b_1||_2^2 + \cdots + ||b_n||_2^2} \\
&= ||A||_F||B||_F.
\end{aligned}$$

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne. Montrer que le polynôme caractéristique de A est réel.

Définissons la norme de Frobenius sur $\mathbb{C}^{n\times n}$ par $||A||_F^2 := \sum_{ij} |A_{ij}|^2$. Montrer que $||A||_F^2 = \mathrm{Tr}(A^2)$, et en déduire que si $|\mathrm{Tr}(A)| < ||A||_F$, alors A est indéfinie.

Solution. *Premièrement, le polynôme caractéristique se scinde sur $\mathbb{R}$ et il est donc réel :*

$$p_A(x) = (-1)^n \prod_i (x - \lambda_i),$$

où $\lambda_i \in \mathbb{R}\ \forall i$.

Deuxièmement, on a bien

$$Tr(A^2) = \sum_{ij} A_{ij}A_{ji} = \sum_{ij} |A_{ij}|^2 = ||A||_F^2.$$

On en déduit que si $|Tr(A)| < ||A||_F$, et en notant λ_i la i-ème valeur propre de A, on a

$$|Tr(A)|^2 < Tr(A^2) \iff |\sum_i \lambda_i|^2 < \sum_i \lambda_i^2, \tag{1}$$

car la i-ème valeur propre de A^2 est λ_i^2.

Remarquons que les valeurs propres de A sont réelles, et donc que $|\sum_i \lambda_i|^2 = (\sum_i \lambda_i)^2$.

Il suit de l'inégalité (1) qu'un des termes croisés vérifie $\lambda_i\lambda_j < 0$. A n'est donc ni semi-définie positive, ni semi-définie négative car elle admet une valeur propre strictement positive, et une autre strictement négative.

Exercice 5. Considérer l'ensemble de points

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Trouver un sous-espace $H \trianglelefteq \mathbb{R}^2$ de dimension 1 atteignant

$$D := \min_{\substack{H \trianglelefteq \mathbb{R}^2 \\ \dim(H)=1}} \sum_{a \in M} \operatorname{dist}(a, H)^2$$

et déterminer D.

Solution. *Soit A la matrice dont les lignes sont les points de M, i.e.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 5 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Par un théorème du cours, nous devons trouver une décomposition

$$A^T A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) U^T,$$

et la colonne de U correspondant à la valeur propre la plus grande engendrera le sous-espace voulu. Ainsi, on diagonalise $A^T A$:

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{pmatrix} 26 & -20 \\ -20 & 26 \end{pmatrix} \\ \det(A^T A - \lambda I) &= (26-\lambda)^2 - 400 \\ &= (\lambda - 46)(\lambda - 6) \\ \Rightarrow \qquad A^T A &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 46 & \\ & 6 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc le sous-espace $H = \{t\binom{1}{-1} \mid t \in \mathbb{R}\}$ est le sous-espace voulu et la valeur D est

$$D = \sum_{a \in M} \operatorname{dist}(a, H) = \sum_{a \in M} ||a||^2 - \frac{1}{2} \left(a^T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)^2 = 52 - 46 = 6.$$

Exercice 6. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 13/10 & 9/10 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & -1 \\ 13/10 & 9/10 & -1 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $k = 1, 2$, calculer l'approximation A_k de rang k de A, vue dans le cours, ainsi que les quantités suivantes

$$||A - A_1||_F, \qquad ||A - A_1||_2, \qquad ||A - A_2||_F, \qquad ||A - A_2||_2.$$

Solution. *On calcule d'abord les valeurs singulières :*

$$A^T A = \frac{1}{100} \begin{pmatrix} 13 & 5 & 13 & 5 \\ 9 & 15 & 9 & 15 \\ 10 & -10 & -10 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 & 9 & 10 \\ 5 & 15 & -10 \\ 13 & 9 & -10 \\ 5 & 15 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.88 & 3.84 & 0 \\ 3.84 & 6.12 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & & \det(A^T A - \lambda I) &= 0 \\ \Leftrightarrow & & (4 - \lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 9) &= 0 \\ \Leftrightarrow & & (\lambda - 4)(\lambda - 1)(\lambda - 9) &= 0 \\ \Rightarrow & & (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= (3, 2, 1). \end{aligned}$$

Puisqu'on ne s'intéresse qu'à A_1 et A_2, on ne doit calculer que les deux premiers vecteurs propres :

$$(A^T A - 9I)u_1 = 0 \qquad\qquad (A^T A - 4I)u_2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5.12x + 3.84y & = 0 \\ 3.84x - 2.88y & = 0 \\ -5z & = 0 \end{cases} \qquad\qquad \Rightarrow \begin{cases} -0.12x + 3.84y & = 0 \\ 3.84x + 2.12y & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors on calcule v_1 et v_2 :

$$v_1 = \frac{A u_1}{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \qquad\qquad v_2 = \frac{A u_2}{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

et on trouve

$$A_1 = \sigma_1 v_1 u_1^T = 3 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/10 & 6/5 & 0 \\ 9/10 & 6/5 & 0 \\ 9/10 & 6/5 & 0 \\ 9/10 & 6/5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = A_1 + \sigma_2 v_2 u_2^T = 2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9/10 & 6/5 & 0 \\ 9/10 & 6/5 & 0 \\ 9/10 & 6/5 & 0 \\ 9/10 & 6/5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/10 & 6/5 & 1 \\ 9/10 & 6/5 & -1 \\ 9/10 & 6/5 & -1 \\ 9/10 & 6/5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rappelons que la norme matricielle $||\cdot||_2$ *est définit comme*

$$||A||_2 = \max_{x:\ ||x||_2=1} ||Ax||_2$$

avec la norme euclidienne habituelle au côté droit. Avec la notation du cours, on a

$$A - A_k = \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i v_i u_i^T.$$

Comme les vecteurs u_i *forment une base orthonormée, tout vecteur unitaire* x *peut être représenté comme une combination linéaire de ces vecteurs, c'est-à-dire* $x = \sum \lambda_i u_i$*, avec des coefficients* α_i *tels que* $\sum \alpha_i^2 = 1$*. Les vecteurs* v_i *forment également une base orthonormée, donc*

$$\begin{aligned} ||(A - A_k)x||_2^2 &= \left\| \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i v_i u_i^T \left(\sum \alpha_i u_i\right) \right\|_2^2 = \left\| \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i \alpha_i v_i u_i^T u_i \right\|_2^2 \\ &= \sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i^2 \alpha_i^2 \, ||v_i||_2^2 \leq \sigma_{k+1}^2 \sum_{i=k+1}^{r} \alpha_i^2 \leq \sigma_{k+1}^2. \end{aligned}$$

Mais on voit facilement que cette borne est atteinte par $x = v_{k+1}$*. Par conséquent,* $||A - A_k||_2 = \sigma_{k+1}$*, et les normes sont :*

$$||A - A_1||_2 = 2, \qquad ||A - A_2||_2 = 1.$$

On observe que les valeurs singulières de $(A - A_k)$ *sont* $\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_r$*, donc on utilise un lemme du cours pour obtenir*

$$\begin{aligned} ||A - A_1||_F &= \left(\sum_{i=2}^{3} \sigma_i^2\right)^{1/2} = \left(\sigma_2^2 + \sigma_3^2\right)^{1/2} = \sqrt{5}, \\ ||A - A_2||_F &= \left(\sum_{i=3}^{3} \sigma_i^2\right)^{1/2} = \left(\sigma_3^2\right)^{1/2} = 1. \end{aligned}$$

Exercice 7.

1. Pour les matrices $P \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n\times d}$, soit p_i la i-ème colonne de P, et q_i^T la i-ème ligne de Q. Montrer que

$$PQ = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i^T.$$

2. Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ une matrice avec décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$, avec r valeurs singulières $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, $r \leq d$. Montrer qu'on a

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i p_i q_i^T.$$

3. Conclure que l'on peut représenter A comme

$$A = URV, \qquad U \in \mathbb{R}^{m\times r},\ R \in \mathbb{R}^{r\times r},\ V \in \mathbb{R}^{r\times d},$$

où la matrice U est composée des premières r colonnes de P, V est composée des premières r lignes de Q, et R est une matrice diagonale avec les r valeurs singulières sur sa diagonale.

Solution.

1. *Soit M_{ij} la matrice telle que $(M_{ij})_{ij} = 1$, et $(M_{ij})_{st} = 0$ si $(s,t) \neq (i,j)$. Alors, on peut réécrire $p_k q_k^T = \sum_i \sum_j p_{ik} q_{kj} M_{ij}$, et donc*

$$\begin{aligned}\sum_k p_k q_k^T &= \sum_k \sum_i \sum_j p_{ik} q_{kj} M_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j \underbrace{\sum_k p_{ik} q_{kj}}_{(PQ)_{ij}} M_{ij} \\ &= \sum_i \sum_j (PQ)_{ij} M_{ij} \\ &= PQ.\end{aligned}$$

2. *On définit $Q' = DQ$, c'est-à-dire que l'on multiplie les lignes de Q par les valeurs singulières : $q_i'^T = \sigma_i q_i^T$. Ainsi,*

$$A = PDQ = PQ' = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i'^T = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i p_i q_i^T = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i p_i q_i^T,$$

où la dernière égalité suit du fait que $\sigma_i = 0$ pour $i > r$.

3. *Dans la partie (2) on a vu qu'en fait il suffit de considérer les premières r colonnes de P et les premières r lignes de Q'. Il ne reste qu'à observer qu'on obtient les premières r lignes de Q', si l'on multiplie la sous-matrice des premières r lignes de Q par une matrice diagonale $r \times r$ avec les valeurs singulières sur la diagonale.*

Exercice 8. Soient $G, H \subseteq \mathbb{R}^n$ des sous-espaces vectoriels et $k = \dim(G) > \dim(H)$. Montrer que G possède une base orthonormale $\{w_1, \ldots w_k\}$ tel que $w_k \perp H$.

Solution. *Soient $\{h_1, \ldots, h_l\}$ une base de H et $\{g_1, \ldots, g_k\}$ une base de G. On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} h_1^T \\ \vdots \\ h_l^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_k \end{pmatrix}$$

de taille $l \times k$. Par le théorème noyau-image on voit que $\ker(A) \neq \varnothing$. Soit $x \in \ker(A)$ alors on observe que $w_k = \sum_{i=1}^{k} x_i g_i$ est orthogonal à H et on utilise ce vecteur pour conclure l'exercice.

Exercice 9. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et $i \in \mathbb{N}$. On suppose que $\ker(A^i) = \ker(A^{i+1}) \neq \mathbb{C}^n$. Montrer que A n'est pas une matrice nilpotente.

Donner un exemple d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ pour laquelle on observe une stabilisation du noyau à partir de sa troisième puissance.

Solution. *Si on démontre que le noyau des puissances de la matrice A devient stable et reste différent de $\mathbb{C}^n$ on a gagné puisque dans ce cas A n'est pas nilpotente. Montrons $\ker(A^{i+2}) = \ker(A^i)$. L'inclusion $\ker(A^{i+2}) \supseteq \ker(A^i)$ est toujours vérifiée. Prenons donc $x \in \ker(A^{i+2})$ alors $0 = A^{i+2}x = A^{i+1}Ax$ et ceci implique que Ax appartient à $\ker(A^{i+1}) = \ker(A^i)$. Ainsi $x \in \ker(A^{i+1}) = \ker(A^i)$ et $\ker(A^{i+2}) = \ker(A^i)$. On termine l'argument par récurrence.*

Comme exemple on peut considérer la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. (*) Soient $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Pour $z \in \mathbb{R}^n$ et $v \in S^{n-1}$, on considère la droite $L_{z,v}$ définie par

$$L_{z,v} = \{z + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = z + \mathrm{span}\{v\}.$$

Soit $d(a_i, L_{z,v})$ la distance de a_i à $L_{z,v}$ pour $i = 1, \ldots, m$.

(i) Supposons que $\sum_{i=1}^m a_i = 0$. Montrer que $\sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z,v})^2 \geq \sum_{i=1}^m d(a_i, L_{0,v})^2$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Conclure que, étant donnés des points $a_1, \ldots, a_m$, on peut trouver un $z \in \mathbb{R}^n$ et $v \in S^{n-1}$ tels que

$$\sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z,v})^2 \leq \sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z',v'})^2,$$

pour tout $z' \in \mathbb{R}^n$ et $v' \in S^{n-1}$. En particulier :

(a) Donner une formule pour z.

(b) Décrire la matrice A telle qu'un vecteur propre normalisé de A^TA associé à la valeur propre la plus grande est une solution pour v.

Solution.