Algèbre linéaire avancée II
printemps 2026

Série 10

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soient $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$. On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = ||Ax - b||^2.$$

Calculer le gradient de f et en déduire qu'une solution optimale du problème des moindres carrés est aussi solution de l'équation $A^TAx = A^Tb$.

Exercice 2. Trouver, à l'aide de la pseudo-inverse, la solution minimale des trois systèmes d'équations:

$$1. \quad x_1 + x_2 = b_1 \qquad 2. \quad \begin{cases} x_1 = b_1 \\ x_1 = b_2 \\ x_1 = b_3 \end{cases} \qquad 3. \quad \begin{cases} 4x_1 = b_1 \\ 0x_1 = b_2 \\ 7x_3 = b_3 \\ 0x_2 = b_4\,. \end{cases}$$

Exercice 3. Soit $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Montrer que $||Ax||_2 \leq ||A||_F||x||_2$, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$. En déduire que $||AB||_F \leq ||A||_F||B||_F$.

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne. Montrer que le polynôme caractéristique de A est réel.

Définissons la norme de Frobenius sur $\mathbb{C}^{n\times n}$ par $||A||_F^2 := \sum_{ij} |A_{ij}|^2$. Montrer que $||A||_F^2 = \mathrm{Tr}(A^2)$, et en déduire que si $|\mathrm{Tr}(A)| < ||A||_F$, alors A est indéfinie.

Exercice 5. Considérer l'ensemble de points

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Trouver un sous-espace $H \trianglelefteq \mathbb{R}^2$ de dimension 1 atteignant

$$D := \min_{\substack{H \trianglelefteq \mathbb{R}^2 \\ \dim(H)=1}} \sum_{a \in M} \operatorname{dist}(a, H)^2$$

et déterminer D.

Exercice 6. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 13/10 & 9/10 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & -1 \\ 13/10 & 9/10 & -1 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $k = 1, 2$, calculer l'approximation A_k de rang k de A, vue dans le cours, ainsi que les quantités suivantes

$$||A - A_1||_F, \qquad ||A - A_1||_2, \qquad ||A - A_2||_F, \qquad ||A - A_2||_2.$$

Exercice 7.

1. Pour les matrices $P \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n \times d}$, soit p_i la i-ème colonne de P, et q_i^T la i-ème ligne de Q. Montrer que

$$PQ = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i^T.$$

2. Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times d}$ une matrice avec décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$, avec r valeurs singulières $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, $r \leq d$. Montrer qu'on a

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i p_i q_i^T.$$

3. Conclure que l'on peut représenter A comme

$$A = URV, \qquad U \in \mathbb{R}^{m \times r},\ R \in \mathbb{R}^{r \times r},\ V \in \mathbb{R}^{r \times d},$$

où la matrice U est composée des premières r colonnes de P, V est composée des premières r lignes de Q, et R est une matrice diagonale avec les r valeurs singulières sur sa diagonale.

Exercice 8. Soient $G, H \subseteq \mathbb{R}^n$ des sous-espaces vectoriels et $k = \dim(G) > \dim(H)$. Montrer que G possède une base orthonormale $\{w_1, \ldots w_k\}$ tel que $w_k \perp H$.

Exercice 9. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et $i \in \mathbb{N}$. On suppose que $\ker(A^i) = \ker(A^{i+1}) \neq \mathbb{C}^n$. Montrer que A n'est pas une matrice nilpotente.

Donner un exemple d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ pour laquelle on observe une stabilisation du noyau à partir de sa troisième puissance.

Exercice 10. (*) Soient $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Pour $z \in \mathbb{R}^n$ et $v \in S^{n-1}$, on considère la droite $L_{z,v}$ définie par

$$L_{z,v} = \{z + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = z + \mathrm{span}\{v\}.$$

Soit $d(a_i, L_{z,v})$ la distance de a_i à $L_{z,v}$ pour $i = 1, \ldots, m$.

(i) Supposons que $\sum_{i=1}^m a_i = 0$. Montrer que $\sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z,v})^2 \geq \sum_{i=1}^m d(a_i, L_{0,v})^2$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Conclure que, étant donnés des points $a_1, \ldots, a_m$, on peut trouver un $z \in \mathbb{R}^n$ et $v \in S^{n-1}$ tels que

$$\sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z,v})^2 \leq \sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z',v'})^2,$$

pour tout $z' \in \mathbb{R}^n$ et $v' \in S^{n-1}$. En particulier :

(a) Donner une formule pour z.

(b) Décrire la matrice A telle qu'un vecteur propre normalisé de $A^T A$ associé à la valeur propre la plus grande est une solution pour v.