Prof. Friedrich Eisenbrand 2 mai 2025

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2025

Série 10

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $D \in \mathbb{R}_+^{m\times n}$ et $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telles que

$$A = PDQ$$

est une décomposition en valeurs singulières de A. Montrer que $A^* = Q^*D^TP^*$ est une décomposition en valeurs singulières de A^*.

Exercice 2. Soient $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$. On considère l'application

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = ||Ax - b||^2.$$

Calculer le gradient de f et en déduire qu'une solution optimale du problème des moindres carrés est aussi solution de l'équation $A^TAx = A^Tb$.

Exercice 3. Considérer l'ensemble de points

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Trouver un sous-espace $H \trianglelefteq \mathbb{R}^2$ de dimension 1 atteignant

$$D := \min_{\substack{H \trianglelefteq \mathbb{R}^2 \\ \dim(H)=1}} \sum_{a\in M} \operatorname{dist}(a, H)^2$$

et déterminer D.

Exercice 4. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 13/10 & 9/10 & 1 \\ 1/2 & 3/2 & -1 \\ 13/10 & 9/10 & -1 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $k = 1, 2$, calculer l'approximation A_k de rang k de A, vue dans le cours, ainsi que les quantités suivantes

$$||A - A_1||_F, \qquad ||A - A_1||_2, \qquad ||A - A_2||_F, \qquad ||A - A_2||_2.$$

Exercice 5.

1. Pour les matrices $P \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $Q \in \mathbb{R}^{n\times d}$, soit p_i la i-ème colonne de P, et q_i^T la i-ème ligne de Q. Montrer que
$$PQ = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i^T.$$
2. Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ une matrice avec décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$, avec r valeurs singulières $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$, $r \leq d$. Montrer qu'on a
$$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i p_i q_i^T.$$
3. Conclure que l'on peut représenter A comme
$$A = URV, \qquad U \in \mathbb{R}^{m\times r},\ R \in \mathbb{R}^{r\times r},\ V \in \mathbb{R}^{r\times d},$$
où la matrice U est composée des premières r colonnes de P, V est composée des premières r lignes de Q, et R est une matrice diagonale avec les r valeurs singulières sur sa diagonale.

Exercice 6. Soient $G, H \subseteq \mathbb{R}^n$ des sous-espaces vectoriels et $k = \dim(G) > \dim(H)$. Montrer que G possède une base orthonormale $\{w_1, \ldots w_k\}$ tel que $w_k \perp H$.

Exercice 7. On considère la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 2 & * & & & & & & & & \\ & 2 & * & & & & & & & \\ & & 4 & * & & & & & & \\ & & & 4 & * & & & & & \\ & & & & 6 & * & & & & \\ & & & & & 6 & * & & & \\ & & & & & & 6 & * & & \\ & & & & & & & 6 & * & \\ & & & & & & & & 6 & * \\ & & & & & & & & & 6 \end{pmatrix}$$

en forme normale de Jordan. Déterminer les chiffres derrière les étoiles en sachant que

$$\dim(\ker(J-2I)) = 1,\ \dim(\ker(J-4I)) = 2$$

$$\dim(\ker(J-6I)) = 3,\ \dim(\ker((J-6I)^2)) = 5,\ \dim(\ker((J-6I)^3)) = 6.$$

Exercice 8. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ et $i \in \mathbb{N}$. On suppose que $\ker(A^i) = \ker(A^{i+1}) \neq \mathbb{C}^n$. Montrer que A n'est pas une matrice nilpotente.

Donner un exemple d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ pour laquelle on observe une stabilisation du noyau à partir de sa troisième puissance.

Exercice 9. (*) Soient $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Pour $z \in \mathbb{R}^n$ et $v \in S^{n-1}$, on considère la droite $L_{z,v}$ définie par

$$L_{z,v} = \{z + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = z + \mathrm{span}\{v\}.$$

Soit $d(a_i, L_{z,v})$ la distance de a_i à $L_{z,v}$ pour $i = 1, \dots, m$.

(i) Supposons que $\sum_{i=1}^m a_i = 0$. Montrer que $\sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z,v})^2 \geq \sum_{i=1}^m d(a_i, L_{0,v})^2$ pour tout $z \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Conclure que, étant donnés des points $a_1, \dots, a_m$, on peut trouver un $z \in \mathbb{R}^n$ et $v \in S^{n-1}$ tels que

$$\sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z,v})^2 \leq \sum_{i=1}^m d(a_i, L_{z',v'})^2,$$

pour tout $z' \in \mathbb{R}^n$ et $v' \in S^{n-1}$. En particulier :

  (a) Donner une formule pour z.

  (b) Décrire la matrice A telle qu'un vecteur propre normalisé de A^TA associé à la valeur propre la plus grande est une solution pour v.