Algèbre linéaire avancée II
printemps 2026

Série 9 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique semi-définie positive.

a) Montrer que les éléments diagonaux a_{ii} de A sont tous positifs ou nuls.

b) Montrer que $a_{ii}a_{jj} \geq a_{ij}^2$ $\forall i, j$. En déduire que si $a_{ii} = 0$ pour un certain indice i, alors la i-ème ligne et la i-ème colonne de A sont nulles.

c) Montrer que si $a_{ii}a_{jj} = a_{ij}^2$ pour une certaine paire d'indices i, j distincts, alors A est singulière.

d) Montrer que si $x^T Ax = 0$, alors $Ax = 0$.

Solution. *a)* $a_{ii} = e_i^T A e_i \geq 0$.

b) Par le critère de Sylvester, toutes les mineurs symétriques sont positifs. En particulier, pour $I = \{i, j\}$,

$$\det(A_I) = \det \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ij} & a_{jj} \end{pmatrix} = a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2 \geq 0.$$

c) Si l'égalité est vérifiée, le mineur ci-dessus est nul. Ainsi A ne peut pas être définie positive (strictement), par contraposée du théorème de Sylvester.

A est donc semi-définie positive mais pas définie positive : elle admet 0 comme valeur propre. Il suit naturellement que A est singulière (le noyau de la matrice n'est pas trivial).

d) Soit $\{u_i\}_i$ la base orthonormale de vecteurs propres de A donnée par le théorème spectral, et soit $\{\lambda_i\}_i$ les valeurs correspondantes. On écrit $x \in \mathbb{R}^n$ dans cette base et on calcule sont image par la forme quadratique :

$$x = \sum_i \alpha_i u_i \implies x^T Ax = \sum_i \alpha_i^2 \lambda_i.$$

Cette somme de valeur positives n'est nulle que si les coordonnées α_i correspondantes aux valeurs λ_i strictement positives sont nulles.

Dès lors, l'égalité $x^T Ax = 0$ implique que x s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs propres associés à la valeur nulle. x appartient donc à l'espace propre associé à 0, qui n'est autre que $\ker(A)$.

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$.

Si U dénote un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, montrer que

$$\lambda_k = \min_{dim(U)=n-k+1} \max_{x\in U\cap S^{n-1}} x^T Ax.$$

Solution. *Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une base orthonormale de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ respectivement. On fixe un entier k. Soit U un espace de dimension $n-k+1$. Clairement, $span\{u_1, \ldots, u_k\} \cap (U \cap S^{n-1}) \supsetneq \{0\}$, alors il existe un vecteur $0 \neq x = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i \in (U \cap S^{n-1})$. Comme*

$$x^T Ax = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \lambda_i \geq \lambda_k,$$

on a que $\max_{x\in(U\cap S^{n-1})} x^T Ax \geq \lambda_k$. Comme c'est vrai pour chaque U de dimension $n-k+1$, on conclut que

$$\min_{dim(U)=n-k+1} \max_{x\in(U\cap S^{n-1})} x^T Ax \geq \lambda_k.$$

Si on prend $W = span\{u_k, \ldots, u_n\}$, pour chaque vecteur $x = \sum_{i=k}^n \beta_i u_i \in W \cap S^{n-1}$ (c'est-à-dire $\sum_{i=k}^n \beta_i^2 = 1$), on a

$$x^T Ax = \sum_{i=k}^{n} \beta_i^2 \lambda_i \leq \lambda_k$$

et $u_k^T A u_k = \lambda_k$. Donc $\max_{x\in W\cap S^{n-1}} x^T Ax = \lambda_k$ et

$$\min_{dim(U)=n-k+1} \max_{x\in U\cap S^{n-1}} x^T Ax \leq \max_{x\in W\cap S^{n-1}} x^T Ax = \lambda_k.$$

Finalement, on conclut que $\lambda_k = \min_{dim(U)=n-k+1} \max_{x\in U\setminus\{0\}} R_A(x)$.

Exercice 3. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$.

Montrer que

$$\lambda_k = \max_{dim(U)\leq n-k} \min_{x\in U^\perp\cap S^{n-1}} x^T Ax,$$

où le maximum est pris sur les sous-espaces U de $\mathbb{R}^n$.

Solution. *Comme on a affaire à un* $\max\min$, *nous procédons de la manière suivante.*

Soit un sous-espace $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *de dimension* $n-k$*. Montrons d'abord que*

$$\min_{x \in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T A x \leq \lambda_k.$$

Remarquons que $dim(U^\perp) = k$*, et donc que* $U^\perp$ *s'intersecte non trivialement avec l'espace engendré par* $\{u_k, \dots, u_n\}$*, les vecteurs propres du théorème spectral associés aux valeurs* $\lambda_n, \dots, \lambda_k$*. Pour n'importe quel vecteur unitaire* w *dans cette intersection, on trouve explicitement*

$$w^T A w \leq \lambda_k.$$

Il suit alors que

$$\max_{dim(U)=n-k} \min_{x \in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T A x \leq \lambda_k,$$

et il ne reste plus qu'à trouver un espace vectoriel U *explicitement qui réalise le maximum.*

Le cours ou la justification de l'exercice ci-dessus nous mènent naturellement à considérer le U *tel que* $U^\perp = span\{u_1, \dots, u_k\}$*. Celui-ci vérifie* $\min_{x \in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T A x = \lambda_k$*, comme voulu.*

Pour conclure, si $dim(U) < n-k$*, alors* $dim(U^\perp) > k$*. Il existe donc un* V *de dimension* k *tel que* $V \subset U^\perp$*. Le minimum est ainsi pris sur* $U^\perp$*, un espace plus grand que* V*, et sa valeur est alors plus petite.*

$$\min_{x \in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T A x \leq \min_{x \in V \cap S^{n-1}} x^T A x.$$

Ces plus petits espaces U *n'ont donc aucune influence sur le maximum et l'égalité reste vraie si on étend le maximum à tous les espaces* U *de dimension inférieure ou égale* $n-k$*.*

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice hermitienne définie positive, et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur unitaire. Montrer que $(x^* A x)^{-1} \leq x^* A^{-1} x$ avec égalité si et seulement si x est un vecteur propre de A.

Indices : Exprimer les images $x^* A x$ et $x^* A^{-1} x$ dans une base orthonormale de vecteurs propres de A. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$ pour des réels a_i, b_i bien choisis.

Solution. *Soit* $\{u_i\}_i$ *la base orthonormale de vecteurs propres de* A *donnée par le théorème spectral, et soit* $\{\lambda_i\}_i$ *les valeurs correspondantes. Remarquons que*

$$Au_i = \lambda_i u_i \iff A^{-1} u_i = \lambda_i^{-1} u_i,$$

et donc que la même base orthonormale est constituée de vecteurs propres de A^{-1} *associés aux valeurs* λ_i^{-1}*.*

Soit désormais $x = \sum_i \alpha_i u_i \in \mathbb{C}^n$ *quelconque unitaire. En particulier*

$$\sum_i |\alpha_i|^2 = 1.$$

On a alors respectivement

$$x^*A^{-1}x = \sum_i |\alpha_i|^2\lambda_i^{-1}, \quad x^*Ax = \sum_i |\alpha_i|^2\lambda_i.$$

Il s'agit désormais d'exprimer ces sommes comme des normes de vecteurs réels bien choisis.

Prenons, à cette fin, les vecteurs v, w tels que $v_i = |\alpha_i|\lambda_i^{-1/2}$ et $w_i = |\alpha_i|\lambda_i^{1/2}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique donc

$$(x^*A^{-1}x)(x^*Ax) = ||v||^2||w||^2 \geq \langle v, w\rangle.$$

En outre, le produit scalaire se simplifie agréablement.

$$\langle v, w\rangle = \sum_i v_iw_i = \sum_i |\alpha_i|^2 = 1.$$

L'inégalité est donc vérifiée.

Étudions désormais quand celle-ci devient égalité. Ceci arrive dès que v et w sont colinéaires, par l'énoncé de Cauchy-Schwarz. Dans ce cas, $v = cw$ pour une certaine constante $c \in \mathbb{R}$, qui implique

$$|\alpha_i|\lambda_i^{-1/2} = c|\alpha_i|\lambda_i^{1/2} \ \forall i \iff |\alpha_i|(c\lambda_i - 1) = 0 \ \forall i.$$

Comme $|\alpha_i|$ n'est pas nul pour tout i, on doit avoir $c = \lambda^{-1}$ pour une certaine valeur propre λ. Dès lors, $|\alpha_i| = 0$ pour tous les indices i tels que $\lambda_i \neq \lambda$. Par conséquent, x appartient à l'espace propre associé à la valeur λ et est donc un vecteur propre.

Exercice 5. Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $P \in \mathbb{C}^{m\times m}, D \in \mathbb{R}_+^{m\times n}$ et $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ telles que

$$A = PDQ$$

est une décomposition en valeurs singulières de A. Montrer que $A^* = Q^*D^TP^*$ est une décomposition en valeurs singulières de A^*.

Solution. *En correspondance avec la définition de la décomposition en valeurs singulières, il s'agit d'abord de montrer que Q^* et P^* sont unitaires. Un exercice d'une série précédente nous permet de vérifier cela simplement.*

De plus, A^* est réelle si et seulement si A est réelle. Dans ce cas, Q^* et P^* sont également réelles, ce qui conclut.

Exercice 6. Déterminer les valeurs singulières des matrices suivantes. Pour les matrices A_3 à A_6, donner aussi une décomposition en valeurs singulières (SVD).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solution. *(i) On a*

$$A_1^T A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres sont $\lambda_1 = 9$, *et* $\lambda_2 = 1$ *(on veut* $\lambda_1 \geq \lambda_2$*). Ainsi les valeurs singulières de* A_1 *sont données par* $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, *i.e.* $\sigma_1 = 3$ *et* $\sigma_2 = 1$.

(ii) On a

$$A_2^T A_2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et la seule valeur singulière est $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{25} = 5$.

(iii) On a

$$A_3^T A_3 = \begin{pmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{pmatrix}$$

et le polynôme caractéristique est

$$p_{A_3^T A_3}(\lambda) = \lambda^2 - 100\lambda + 900 = (\lambda - 90)(\lambda - 10).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 90$ *et* $\lambda_2 = 10$. *Les valeurs singulières de* A_3 *sont* $\sigma_1 = 3\sqrt{10}$ *et* $\sigma_2 = \sqrt{10}$, *ainsi la matrice* $D \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ *est donnée par*

$$D = \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à λ_1 *et* λ_2 *sont*

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

et un choix pour $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *est*

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On cherche maintenant $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. *On commence par trouver une base orthonormée* (v_1, v_2, v_3) *de* $\mathbb{R}^3$, *où pour* $i = 1, 2$ *on sait que*

$$v_i = \frac{1}{\sigma_i} A u_i.$$

Ainsi

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On doit donc trouver un vecteur v_3 *normalisé et orthogonal à* v_1 *et* v_2. *On trouve, par exemple,*

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et ainsi

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement, on vérifie que

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

(iv) On a

$$A_4^T A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et les valeurs propres sont $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 2$. Les valeurs singulières de A_3 sont $\sigma_1 = \sqrt{3}$ et $\sigma_2 = \sqrt{2}$, ainsi la matrice $D \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ est donnée par

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 sont

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et un choix pour $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ est

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche maintenant $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. On commence par trouver

$$v_i = \frac{1}{\sigma_i} A u_i.$$

Ainsi

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On a que (v_1, v_2) n'est pas une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, on doit donc trouver un vecteur v_3 normalisé et orthogonal à v_1 et v_2. On trouve, par exemple,

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et ainsi

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

(v) *On a*

$$A_5^T A_5 = (9)$$

et avec comme seule valeur propre $\lambda_1 = 9$. *Le vecteur propre normalisé associé à* $\lambda_1 = 9$ *est* $v_1 = 1$. *Ainsi* $Q = (1)$. *La matrice* $D \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ *est donnée par* $D = (3\ \ 0\ \ 0)^T$. *Pour la matrice* P, *on commence par trouver*

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_1} A_5 u_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Il faut maintenant compléter (v_1) *en une base orthonormée* (v_1, v_2, v_3) *de* $\mathbb{R}^3$. *On complète* (v_1) *par* $v_2 = \frac{1}{3}(2\ \ -1\ \ 2)^T$ *et* $v_3 = \frac{1}{3}(2\ \ 2\ \ -1)^T$. *On obtient*

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(vi) *On calcule la SVD de* $(A_6)^T$. *On commence par calculer*

$$(A_6^T)^T A_6^T = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix},$$

avec $\lambda_1 = 25$ *et* $\lambda_2 = 9$. *La matrice* D *est*

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à λ_1 *et* λ_2 *sont*

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

et un choix pour $Q \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *est*

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs v_1 *et* v_2 *sont donnés par*

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{18}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On complète en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ *avec*

$$v_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

et

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On a que $A^T = PDQ$. *La SVD pour* A *est donnée par* $A = (PDQ)^T = Q^T D^T P^T$.

Exercice 7. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

1. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice orthogonale, alors une décomposition de A en valeurs singulières est $A = AI_nI_n$.
2. Les valeurs singulières d'une matrice diagonale $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sur la diagonale sont les valeurs diagonales $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Solution.

1. *C'est vrai. Pour trouver une décomposition en SVD, on doit diagonaliser* A^TA*, où* $A^TA = I_n$*. Ainsi, les valeurs propres sont* $\lambda_i = 1$ *et les vecteurs propres de* A^TA *sont les vecteurs* e_i *de la base canonique de* $\mathbb{R}^n$*, ainsi* $Q = I_n$*. La matrice* $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *est diagonale avec les* $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ *sur la diagonale. Ainsi,* $D = I_n$ *et on obtient*

$$A = PDQ = PI_nI_n,$$

   et la seule solution pour la matrice P *est* $P = A$.

2. *C'est faux. En effet, les valeurs singulières sont toujours positives, et on les obtient avec* $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i^2} = |\lambda_i|$*, où* λ_i *sont les valeurs propres de* A*. Les valeurs singulières sont les valeurs absolues des valeurs propres non nulles* λ_i*.*

Exercice 8. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Montrer que sa plus grande valeur singulière σ_1 domine toutes ses valeurs propres λ : $\sigma_1 \geq |\lambda|$.

Solution. *Par définition,* σ_1^2 *est la plus grande valeur propre de* A^*A *et vérifie par conséquent*

$$\sigma_1^2 = \max_{x\in S^{n-1}} x^*A^*Ax = \max_{x\in S^{n-1}} ||Ax||^2.$$

Pour n'importe quel vecteur propre u *unitaire de* A *associé à une valeur propre* λ*, on a donc*

$$\sigma_1^2 \geq ||Au||^2 = ||\lambda u||^2 = |\lambda|^2,$$

qui conclut.

Exercice 9. Calculer la matrice pseudo-inverse des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution. *1. On commence par trouver une décomposition en valeurs singulières de A^T, $A^T = PDQ$, car cela simplifie les calculs. On trouve $AA^T = (3)$, donc*

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et $Q = 1$. Par conséquent,

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et on trouve v_2, v_3 orthonormaux. Par exemple

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On pose $P := \begin{pmatrix} v_1, v_2, v_3 \end{pmatrix}$ une matrice orthogonale, et on vérifie qu'on a bien $A^T = PDQ$. Par suite, $A = Q^T D^T P^T$ et

$$A^+ = P(D^T)^+ Q = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

2. On a

$$B^* B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 0$. Une base orthonormée de l'espace propre associé à la valeur λ_1 est donnée par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur propre associé à λ_3 est

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$Q = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour terminer, on calcule

$$P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} ,$$

avec

$$v_1 = \frac{Bu_1}{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \ v_2 = \frac{Bu_2}{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Donc

$$B^+ = Q^* D^+ P^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

3. *On a*

$$C^* C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

avec polynôme caractéristique $p_{C^*C}(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)$. *On a donc* $\lambda_1 = 2$ *et* $\lambda_2 = 0$. *On cherche les vecteurs propres associés aux valeurs propres. Pour* $\lambda_1 = 2$ *on trouve*

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

et pour $\lambda_2 = 0$ *on trouve*

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Donc

$$Q = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} , \ D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Après on calcule

$$v_1 = Cu_1/\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

On complète v_1 *avec* v_2 *pour former une base orthonormée de* $\mathbb{R}^2$, *et donc*

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Donc

$$C^+ = Q^* D^+ P^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Exercice 10. Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ et $B \in K^{n\times p}$. Est-il toujours vrai que $(AB)^+ = B^+A^+$?

Solution. *La réponse est non. On prouve cela avec un contre-exemple. On considère*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

On a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

On trouve

$$A^+ = (AB)^+ = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} ,$$

et

$$B^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

On a donc

$$(AB)^+ = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \neq B^+A^+ = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix} .$$

Exercice 11. Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. On définit l'ordre partiel $\geq$ sur les matrices par

$$R \geq S \text{ sur V} \iff x^T Rx \geq x^T Sx \ \forall x \in V.$$

Posons $N_A(\lambda)$ le nombre de valeurs propres de A inférieures ou égales à λ. Montrer les équivalences suivantes.

1. $N_A(\lambda) \leq k \iff \lambda_{n-k} > \lambda$, et
2. $N_A(\lambda) \geq k \iff \lambda_{n-k+1} \leq \lambda$.

En déduire, à l'aide d'autres exercices de cette série, les propositions suivantes.

1. S'il existe un $\delta > 0$ et une matrice $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\operatorname{rank}(Q) \leq k$ vérifiant $A \geq (\lambda + \delta)I - Q$ sur $\mathbb{R}^n$, alors $N_A(\lambda) \leq k$.
2. Si pour chaque $\delta > 0$ il existe un sous-espace $V \subseteq \mathbb{R}^n$ avec $\dim(V) \geq k$ vérifiant $A \leq (\lambda + \delta)I$ sur V, alors $N_A(\lambda) \geq k$.

Solution. *Nous montrons uniquement les deux propositions à l'aide des équivalences.*

1. *Il s'agit ici de montrer que $\lambda_{n-k} > \lambda$. Utilisons donc la relation du type* $\max\min$ *d'un autre exercice de cette série. Pour pouvoir conclure, il faut alors trouver un espace vectoriel U de dimension au plus k tel que*

$$\min_{x \in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T A x > \lambda.$$

L'hypothèse sur A nous donne

$$x^T A x \geq \lambda + \delta - x^T Q x,$$

pour n'importe quel x unitaire de $U^\perp$.

Prenons donc $U = \mathrm{Im}\,(Q)$, de sorte que $U^\perp = \ker(Q^T)$. Par suite, on a

$$\lambda_{n-k} \geq \min_{x \in \ker(Q^T) \cap S^{n-1}} x^T A x \geq \lambda + \delta > \lambda,$$

ce qui conclut.

2. *Montrons que $\lambda_{n-k+1} \leq \lambda$. Par le même raisonnement que ci-dessus, et grâce à un autre exercice de cette série,*

$$\max_{x \in U \cap S^{n-1}} x^T A x \geq \lambda_{n-k+1},$$

pour n'importe quel sous-espace U de dimension k.

Or, par hypothèse,

$$x^T A x \leq \lambda + \delta,$$

pour tout $\delta > 0$ et x unitaire de V. En restreignant V à un sous-espace U de dimension k, on trouve bien,

$$\lambda_{n-k+1} \leq \max_{x \in U \cap S^{n-1}} x^T A x \leq \max_{x \in V \cap S^{n-1}} x^T A x \leq \lambda + \delta.$$

L'inégalité étant vraie pour tout $\delta > 0$, le résultat est démontré.

Exercice 12. (*) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique et soit

$$A = U \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U^T$$

une factorisation de A telle que $U = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est orthogonale et $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Pour $1 \leq \ell < n$, montrer qu'on a

$$\max_{\substack{x \in S^{n-1} \\ x \perp u_1, \ldots, x \perp u_\ell}} x^T A x = \lambda_{\ell+1}$$

et $u_{\ell+1}$ est une solution optimale.

Solution.