

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2026

Série 9

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique semi-définie positive.

- a) Montrer que les éléments diagonaux a_{ii} de A sont tous positifs ou nuls.
- b) Montrer que $a_{ii}a_{jj} \geq a_{ij}^2 \forall i, j$. En déduire que si $a_{ii} = 0$ pour un certain indice i , alors la i -ème ligne et la i -ème colonne de A sont nulles.
- c) Montrer que si $a_{ii}a_{jj} = a_{ij}^2$ pour une certaine paire d'indices i, j distincts, alors A est singulière.
- d) Montrer que si $x^T Ax = 0$, alors $Ax = 0$.

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Si U dénote un sous-espace de \mathbb{R}^n , montrer que

$$\lambda_k = \min_{\dim(U)=n-k+1} \max_{x \in U \cap S^{n-1}} x^T Ax.$$

Exercice 3. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Montrer que

$$\lambda_k = \max_{\dim(U) \leq n-k} \min_{x \in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T Ax,$$

où le maximum est pris sur les sous-espaces U de \mathbb{R}^n .

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice hermitienne définie positive, et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur unitaire. Montrer que $(x^*Ax)^{-1} \leq x^*A^{-1}x$ avec égalité si et seulement si x est un vecteur propre de A .

Indices : Exprimer les images x^*Ax et $x^*A^{-1}x$ dans une base orthonormale de vecteurs propres de A . Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2) \geq (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2$ pour des réels a_i, b_i bien choisis.

Exercice 5. Soit $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $P \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $D \in \mathbb{R}_+^{m \times n}$ et $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telles que

$$A = PDQ$$

est une décomposition en valeurs singulières de A . Montrer que $A^* = Q^*D^T P^*$ est une décomposition en valeurs singulières de A^* .

Exercice 6. Déterminer les valeurs singulières des matrices suivantes. Pour les matrices A_3 à A_6 , donner aussi une décomposition en valeurs singulières (SVD).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

1. Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice orthogonale, alors une décomposition de A en valeurs singulières est $A = AI_n I_n$.
2. Les valeurs singulières d'une matrice diagonale $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur la diagonale sont les valeurs diagonales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Exercice 8. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Montrer que sa plus grande valeur singulière σ_1 domine toutes ses valeurs propres λ : $\sigma_1 \geq |\lambda|$.

Exercice 9. Calculer la matrice pseudo-inverse des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Soit $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit $A \in K^{m \times n}$ et $B \in K^{n \times p}$. Est-il toujours vrai que $(AB)^+ = B^+A^+$?

Exercice 11. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. On définit l'ordre partiel \geq sur les matrices par

$$R \geq S \text{ sur } V \iff x^T R x \geq x^T S x \quad \forall x \in V.$$

Posons $N_A(\lambda)$ le nombre de valeurs propres de A inférieures ou égales à λ . Montrer les équivalences suivantes.

1. $N_A(\lambda) \leq k \iff \lambda_{n-k} > \lambda$, et
2. $N_A(\lambda) \geq k \iff \lambda_{n-k+1} \leq \lambda$.

En déduire, à l'aide d'autres exercices de cette série, les propositions suivantes.

1. S'il existe un $\delta > 0$ et une matrice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec $\text{rank}(Q) \leq k$ vérifiant $A \geq (\lambda + \delta)I - Q$ sur \mathbb{R}^n , alors $N_A(\lambda) \leq k$.
2. Si pour chaque $\delta > 0$ il existe un sous-espace $V \subseteq \mathbb{R}^n$ avec $\dim(V) \geq k$ vérifiant $A \leq (\lambda + \delta)I$ sur V , alors $N_A(\lambda) \geq k$.

Exercice 12. (*) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique et soit

$$A = U \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U^T$$

une factorisation de A telle que $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est orthogonale et $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Pour $1 \leq \ell < n$, montrer qu'on a

$$\max_{\substack{x \in S^{n-1} \\ x \perp u_1, \dots, x \perp u_\ell}} x^T A x = \lambda_{\ell+1}$$

et $u_{\ell+1}$ est une solution optimale.