

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2024

Série 8 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique semi-définie positive.

- a) Montrer que les éléments diagonaux a_{ii} de A sont tous positifs ou nuls.
- b) Montrer que $a_{ii}a_{jj} \geq a_{ij}^2 \forall i, j$. En déduire que si $a_{ii} = 0$ pour un certain indice i , alors la i -ème ligne et la i -ème colonne de A sont nulles.
- c) Montrer que si $a_{ii}a_{jj} = a_{ij}^2$ pour une certaine paire d'indices i, j distincts, alors A est singulière.
- d) Montrer que si $x^T Ax = 0$, alors $Ax = 0$.

Solution.

- a) $a_{ii} = e_i^T A e_i \geq 0$.
- b) Par le critère de Sylvester, toutes les mineurs symétriques sont positifs. En particulier, pour $I = \{i, j\}$,

$$\det(A_I) = \det \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ij} & a_{jj} \end{pmatrix} = a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2 \geq 0.$$

- c) Si l'égalité est vérifiée, le mineur ci-dessus est nul. Ainsi A ne peut pas être définie positive (strictement), par contraposée du théorème de Sylvester.

A est donc semi-définie positive mais pas définie positive : elle admet 0 comme valeur propre. Il suit naturellement que A est singulière (le noyau de la matrice n'est pas trivial).

- d) Soit $\{u_i\}_i$ la base orthonormale de vecteurs propres de A donnée par le théorème spectral, et soit $\{\lambda_i\}_i$ les valeurs correspondantes. On écrit $x \in \mathbb{R}^n$ dans cette base et on calcule son image par la forme quadratique :

$$x = \sum_i \alpha_i u_i \implies x^T Ax = \sum_i \alpha_i^2 \lambda_i.$$

Cette somme de valeurs positives n'est nulle que si les coordonnées α_i correspondantes aux valeurs λ_i strictement positives sont nulles.

Dès lors, l'égalité $x^T A x = 0$ implique que x s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs propres associés à la valeur nulle. x appartient donc à l'espace propre associé à 0, qui n'est autre que $\ker(A)$.

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice hermitienne définie positive, et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur unitaire. Montrer que $(x^* A x)^{-1} \leq x^* A^{-1} x$ avec égalité si et seulement si x est un vecteur propre de A .

Indices : Exprimer les images $x^* A x$ et $x^* A^{-1} x$ dans une base orthonormale de vecteurs propres de A . Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2) \geq (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2$ pour des réels a_i, b_i bien choisis.

Solution. Soit $\{u_i\}_i$ la base orthonormale de vecteurs propres de A donnée par le théorème spectral, et soit $\{\lambda_i\}_i$ les valeurs correspondantes. Remarquons que

$$A u_i = \lambda_i u_i \iff A^{-1} u_i = \lambda_i^{-1} u_i,$$

et donc que la même base orthonormale est constituée de vecteurs propres de A^{-1} associés aux valeurs λ_i^{-1} .

Soit désormais $x = \sum_i \alpha_i u_i \in \mathbb{C}^n$ quelconque unitaire. En particulier $\sum_i |\alpha_i|^2 = 1$.

On a alors respectivement

$$x^* A^{-1} x = \sum_i |\alpha_i|^2 \lambda_i^{-1}, \quad x^* A x = \sum_i |\alpha_i|^2 \lambda_i.$$

Il s'agit désormais d'exprimer ces sommes comme des normes de vecteurs réels bien choisis.

Prenons, à cette fin, les vecteurs v, w tels que $v_i = |\alpha_i| \lambda_i^{-1/2}$ et $w_i = |\alpha_i| \lambda_i^{1/2}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique donc

$$(x^* A^{-1} x)(x^* A x) = \|v\|^2 \|w\|^2 \geq \langle v, w \rangle.$$

En outre, le produit scalaire se simplifie agréablement.

$$\langle v, w \rangle = \sum_i v_i w_i = \sum_i |\alpha_i|^2 = 1.$$

L'inégalité est donc vérifiée.

Étudions désormais quand celle-ci devient égalité. Ceci arrive dès que v et w sont colinéaires, par l'énoncé de Cauchy-Schwarz. Dans ce cas, $v = c w$ pour une certaine constante $c \in \mathbb{R}$, qui implique

$$|\alpha_i| \lambda_i^{-1/2} = c |\alpha_i| \lambda_i^{1/2} \quad \forall i \iff |\alpha_i| (c \lambda_i - 1) = 0 \quad \forall i.$$

Comme $|\alpha_i|$ n'est pas nul pour tout i , on doit avoir $c = \lambda^{-1}$ pour une certaine valeur propre λ . Dès lors, $|\alpha_i| = 0$ pour tous les indices i tels que $\lambda_i \neq \lambda$. Par conséquent, x appartient à l'espace propre associé à la valeur λ et est donc un vecteur propre.

Exercice 3. Soit $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Montrer que $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2$, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$. En déduire que $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$.

Solution. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et soit $x \in \mathbb{C}^n$. On commence par montrer que

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_F \|x\|_2.$$

Soient A_1, \dots, A_n les lignes de A . On a

$$\begin{aligned} \|Ax\|_2 &= \left\| \begin{pmatrix} A_1 x \\ \vdots \\ A_n x \end{pmatrix} \right\|_2 \\ &= \sqrt{\langle A_1^\top, x \rangle^2 + \dots + \langle A_n^\top, x \rangle^2} \\ &\leq \sqrt{\|A_1\|_2^2 \|x\|_2^2 + \dots + \|A_n\|_2^2 \|x\|_2^2} \\ &= \sqrt{\|A_1\|_2^2 + \dots + \|A_n\|_2^2} \|x\|_2 \\ &= \|A\|_F \|x\|_2, \end{aligned}$$

où l'inégalité découle de Cauchy-Schwarz.

Soit $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et soient b_1, \dots, b_n les colonnes de la matrice B . Alors

$$\begin{aligned} \|AB\|_F &= \left\| \begin{pmatrix} Ab_1 & \dots & Ab_n \end{pmatrix} \right\|_F \\ &= \sqrt{\|Ab_1\|_2^2 + \dots + \|Ab_n\|_2^2} \\ &\leq \sqrt{\|A\|_F^2 \|b_1\|_2^2 + \dots + \|A\|_F^2 \|b_n\|_2^2} \quad \text{par la première partie} \\ &= \|A\|_F \sqrt{\|b_1\|_2^2 + \dots + \|b_n\|_2^2} \\ &= \|A\|_F \|B\|_F. \end{aligned}$$

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice hermitienne. Montrer que le polynôme caractéristique de A est réel.

Définissons la norme de Frobenius sur $\mathbb{C}^{n \times n}$ par $\|A\|_F^2 := \sum_{ij} |A_{ij}|^2$. Montrer que $\|A\|_F^2 = \text{Tr}(A^2)$, et en déduire que si $|\text{Tr}(A)| < \|A\|_F$, alors A est indéfinie.

Solution. Premièrement, le polynôme caractéristique se scinde sur \mathbb{R} et il est donc réel.

$$p_A(x) = (-1)^n \prod_i (x - \lambda_i),$$

où $\lambda_i \in \mathbb{R} \forall i$.

Deuxièmement, on a bien

$$\text{Tr}(A^2) = \sum_{ij} A_{ij} A_{ji} = \sum_{ij} |A_{ij}|^2 = \|A\|_F^2.$$

On en déduit que si $|\text{Tr}(A)| < \|A\|_F$, et en notant λ_i la i -ème valeur propre de A , on a

$$|\text{Tr}(A)|^2 < \text{Tr}(A^2) \iff \left| \sum_i \lambda_i \right|^2 < \sum_i \lambda_i^2, \quad (1)$$

car la i -ème valeur propre de A^2 est λ_i^2 .

Remarquons que les valeurs propres de A sont réelles, et donc que $|\sum_i \lambda_i|^2 = (\sum_i \lambda_i)^2$.

Il suit de l'inégalité (1) qu'un des termes croisés vérifie $\lambda_i \lambda_j < 0$. A n'est donc ni semi-définie positive, ni semi-définie négative car elle admet une valeur propre strictement positive, et une autre strictement négative.

Exercice 5. Déterminer les valeurs singulières des matrices suivantes. Pour les matrices A_3 à A_6 , donner aussi la décomposition en valeurs singulières (SVD).

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, & A_2 &= \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & A_3 &= \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}, \\ A_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, & A_5 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, & A_6 &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Solution.

(i) $A_1^T A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ et les valeurs propres sont $\lambda_1 = 9$, et $\lambda_2 = 1$ (on veut $\lambda_1 \geq \lambda_2$).

Ainsi les valeurs singulières de A_1 sont données par $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, i.e. $\sigma_1 = 3$ et $\sigma_2 = 1$.

(ii) $A_2^T A_2 = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et la seule valeur singulière est $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{25} = 5$.

(iii) $A_3^T A_3 = \begin{pmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{pmatrix}$ et le polynôme caractéristique est

$$p_{A_3^T A_3}(\lambda) = \lambda^2 - 100\lambda + 900 = (\lambda - 90)(\lambda - 10).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 90$ et $\lambda_2 = 10$. Les valeurs singulières de A_3 sont $\sigma_1 = 3\sqrt{10}$ et $\sigma_2 = \sqrt{10}$, ainsi la matrice $D \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ est donnée par

$$D = \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 sont

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

et un choix pour $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ est

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On cherche maintenant $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. On commence par trouver une base orthonormée (v_1, v_2, v_3) de \mathbb{R}^3 , où pour $i = 1, 2$ on sait que

$$v_i = \frac{1}{\sigma_i} A u_i.$$

Ainsi

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On doit donc trouver un vecteur v_3 normalisé et orthogonal à v_1 et v_2 . On trouve, par exemple,

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et ainsi

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement, on vérifie que

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

(iv) $A_4^T A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et les valeurs propres sont $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_2 = 2$. Les valeurs singulières de A_3 sont $\sigma_1 = \sqrt{3}$ et $\sigma_2 = \sqrt{2}$, ainsi la matrice $D \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ est donnée par

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 sont

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et un choix pour $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ est

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche maintenant $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. On commence par trouver

$$v_i = \frac{1}{\sigma_i} A u_i.$$

Ainsi

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On a que (v_1, v_2) n'est pas une base orthonormée de \mathbb{R}^3 , on doit donc trouver un vecteur v_3 normalisé et orthogonal à v_1 et v_2 . On trouve, par exemple,

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et ainsi

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

(v) On a $A_5^T A_5 = (9)$ et avec comme seule valeur propre $\lambda_1 = 9$. Le vecteur propre normalisé associé à $\lambda_1 = 9$ est $v_1 = 1$. Ainsi $Q = (1)$. La matrice $D \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ est donnée par $D = (3 \ 0 \ 0)^T$. Pour la matrice P , on commence par trouver

$$v_1 = \frac{1}{\sigma_1} A_5 u_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Il faut maintenant compléter (v_1) en une base orthonormée (v_1, v_2, v_3) de \mathbb{R}^3 . On complète (v_1) par $v_2 = \frac{1}{3}(2 \ -1 \ 2)^T$ et $v_3 = \frac{1}{3}(2 \ 2 \ -1)^T$. On obtient

$$P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(vi) On calcule la SVD de $(A_6)^T$. On commence par calculer

$$(A_6^T)^T A_6^T = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 8 & 17 \end{pmatrix},$$

avec $\lambda_1 = 25$ et $\lambda_2 = 9$. La matrice D est

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 sont

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

et un choix pour $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ est

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs v_1 et v_2 sont donnés par

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On complète en une base orthonormée de \mathbb{R}^3 avec

$$v_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

et

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{18}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

On a que $A^T = PDQ$. La SVD pour A est donnée par $A = (PDQ)^T = Q^T D^T P^T$.

Exercice 6. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

1. Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice orthogonale, alors une décomposition de A en valeurs singulières est $A = AI_n I_n$.
2. Les valeurs singulières d'une matrice diagonale $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur la diagonale sont les valeurs diagonales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Solution.

1. C'est vrai. Pour trouver une décomposition en SVD, on doit diagonaliser $A^T A$, où $A^T A = I_n$. Ainsi, les valeurs propres sont $\lambda_i = 1$ et les vecteurs propres de $A^T A$ sont les vecteurs e_i de la base canonique de \mathbb{R}^n , ainsi $Q = I_n$. La matrice $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est diagonale avec les $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ sur la diagonale. Ainsi, $D = I_n$ et on obtient

$$A = PDQ = PI_n I_n,$$

et la seule solution pour la matrice P est $P = A$.

2. C'est faux. En effet, les valeurs singulières sont toujours positives, et on les obtient avec $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i^2} = |\lambda_i|$, où λ_i sont les valeurs propres de $A^T A = A^2$. Les valeurs singulières sont les valeurs absolues des valeurs propres non nulles λ_i .

Exercice 7. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Montrer que sa plus grande valeur singulière σ_1 domine toutes ses valeurs propres λ : $\sigma_1 \geq |\lambda|$.

Solution. Par définition, σ_1^2 est la plus grande valeur propre de A^*A et vérifie par conséquent

$$\sigma_1^2 = \max_{x \in \mathcal{S}^{n-1}} x^* A^* A x = \max_{x \in \mathcal{S}^{n-1}} \|Ax\|^2.$$

Pour n'importe quel vecteur propre u unitaire de A associé à une valeur propre λ , on a donc

$$\sigma_1^2 \geq \|Au\|^2 = \|\lambda u\|^2 = |\lambda|^2,$$

qui conclut.

Exercice 8. Calculer la matrice pseudo-inverse des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution.

1. On commence par trouver une décomposition en valeurs singulières de A^T , $A^T = PDQ$, car cela simplifie les calculs. On trouve $AA^T = (3)$, donc $D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et $Q = 1$. Par conséquent, $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1 \ 1 \ 1)^T$ et on trouve v_2, v_3 orthonormaux. Par exemple

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On pose $P := (v_1, v_2, v_3)$ une matrice orthogonale, et on vérifie qu'on a bien $A^T = PDQ$. Par suite, $A = Q^T D^T P^T$ et

$$A^+ = P(D^T)^+ Q = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

2. On a

$$B^* B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 0$. Une base orthonormée de l'espace propre associé à la valeur λ_1 est donnée par

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur propre associé à λ_3 est

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$Q = (u_1 \ u_2 \ u_3)^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour terminer, on calcule

$$P = (v_1 \ v_2),$$

avec

$$v_1 = \frac{Bu_1}{\sigma_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{Bu_2}{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$B^+ = Q^* D^+ P^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. On a

$$C^* C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

avec polynôme caractéristique $p_{C^*C}(\lambda) = \lambda(\lambda-2)$. On a donc $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 0$. On cherche les vecteurs propres associés aux valeurs propres. Pour $\lambda_1 = 2$ on trouve

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et pour $\lambda_2 = 0$ on trouve

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$Q = (u_1 \ u_2)^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Après on calcule

$$v_1 = Cu_1/\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On complète v_1 avec v_2 pour former une base orthonormée de \mathbb{R}^2 , et donc

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$C^+ = Q^* D^+ P^* = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Trouver, à l'aide de la pseudo-inverse, la solution minimale des trois systèmes d'équations:

$$1. \ x_1 + x_2 = b_1, \quad 2. \ \begin{cases} x_1 = b_1, \\ x_1 = b_2, \\ x_1 = b_3, \end{cases} \quad 3. \ \begin{cases} 4x_1 = b_1, \\ 0x_1 = b_2, \\ 7x_3 = b_3, \\ 0x_2 = b_4. \end{cases}$$

Solution. Soit $A \in K^{m \times n}$, $x \in K^{n \times 1}$, $b \in K^{m \times 1}$. La solution minimale du système $Ax = b$, est donnée par $x^+ = A^+ b$. Elle satisfait $\|Ax^+ - b\|_2 \leq \|Ax - b\|_2, \forall x \in K^{n \times 1}$.

1. La matrice associée au premier système est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut trouver une décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$. On trouve

$$P = 1, \quad D = (\sqrt{2} \ 0), \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc on a

$$A^+ = Q^* D^+ P^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$x^+ = A^+ b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice associée au deuxième système est

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut trouver une décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$. On trouve

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q = 1.$$

Donc on a

$$A^+ = Q^* D^+ P^* = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$x^+ = A^+ b = \frac{1}{3} (b_1 + b_2 + b_3).$$

3. La matrice associée au troisième système est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut trouver une décomposition en valeurs singulières $A = PDQ$. On trouve

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc on a

$$A^+ = Q^* D^+ P^* = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$x^+ = A^+ b = \begin{pmatrix} b_1/4 \\ 0 \\ b_3/7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Soit $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit $A \in K^{m \times n}$ et $B \in K^{n \times p}$. Est-il toujours vrai que $(AB)^+ = B^+ A^+$?

Solution. La réponse est non. On prouve cela avec un contre-exemple. On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve

$$A^+ = (AB)^+ = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$B^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$(AB)^+ = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \neq B^+ A^+ = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. (*) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique et soit

$$A = U \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U^T$$

une factorisation de A telle que $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est orthogonale et $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Pour $1 \leq \ell < n$ on a

$$\max_{\substack{x \in S^{n-1} \\ x \perp u_1, \dots, x \perp u_\ell}} x^T A x = \lambda_{\ell+1}$$

et $u_{\ell+1}$ est une solution optimale.

Solution.