
Algèbre linéaire avancée II
printemps 2026

Série 8 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice hermitienne et $u, v \in \mathbb{C}^n$ deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes. Montrer que u et v sont orthogonaux par rapport au produit hermitien standard.

Solution. Soient u, v des vecteurs propres de A associés aux valeurs $\lambda \neq \mu$. Alors

$$\begin{aligned} \lambda u^T \bar{v} &= (\lambda u)^T \bar{v} \\ &= (Au)^T \bar{v} \\ &= u^T \bar{A} \bar{v} \\ &= u^T \overline{Av} \\ &= u^T \bar{\mu} v \\ &= \bar{\mu} u^T \bar{v}. \end{aligned}$$

Or comme μ est réel par l'exercice précédent, l'inégalité $\lambda \neq \bar{\mu}$ permet de conclure.

Exercice 2. Contraposée du théorème spectral.

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit hermitien standard sur \mathbb{C}^n (c'est-à-dire $\langle x, y \rangle = x^T \bar{y}$ pour tous $x, y \in \mathbb{C}^n$) et soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice diagonalisable telle que :

- i) chaque valeur propre est réelle, et
- ii) pour tout couple (u, v) de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes, $\langle u, v \rangle = 0$.

Montrer que A se diagonalise dans une base orthonormale. En déduire que A est hermitienne.

Solution. Nous savons que A se diagonalise, et que les espaces propres différents sont deux à deux orthogonaux grâce à la seconde hypothèse.

Il s'agit donc uniquement de trouver une base orthonormale de chaque espace propre afin que leur concaténation donne une base orthonormale de \mathbb{C}^n de vecteurs propres de A . Pour cela, on applique simplement Gram-Schmidt sur des bases quelconques de chaque espace propre.

Ceci nous donne

$$A = PDP^{-1}$$

avec P la matrice de vecteurs propres choisis, et D la matrice diagonale des valeurs propres correspondantes. Par orthonormalité dans \mathbb{C} , on a $P^T \bar{P} = I$, et donc

$$A = PDP^*$$

Comme les valeurs propres ont été supposées réelles, A est hermitienne car

$$A^* = (PDP^*)^* = PD^*P^* = A.$$

Exercice 3. Soit A la matrice hermitienne

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2-i & -3i \\ 2+i & 0 & 1-i \\ 3i & 1+i & 0 \end{bmatrix}.$$

Trouver une matrice unitaire $P \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ telle que P^*AP est une matrice diagonale.

Solution. Le polynôme caractéristique de A est

$$p(x) = \det(A - xI) = (x+1)(x-6)(x+2).$$

Les valeurs propres de A sont donc $-1, 6$ et -2 . On trouve les bases des espaces propres

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = -1 : & b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1+2i \\ 1 \end{bmatrix} \\ \lambda_2 = 6 : & b_2 = \begin{bmatrix} 1-21i \\ 6-9i \\ 13 \end{bmatrix} \\ \lambda_3 = -2 : & b_3 = \begin{bmatrix} 1+3i \\ -2-i \\ 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Les vecteurs b_1, b_2, b_3 sont deux-à-deux orthogonaux, parce que les valeurs propres

sont distinctes. Il reste à les normaliser et on obtient

$$p_1 = b_1/||b_1|| = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 + 2i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p_2 = b_2/||b_2|| = \frac{1}{\sqrt{728}} \begin{bmatrix} 1 - 21i \\ 6 - 9i \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$p_3 = b_3/||b_3|| = \frac{1}{\sqrt{40}} \begin{bmatrix} 1 + 3i \\ -2 - i \\ 5 \end{bmatrix}$$

On obtient la matrice unitaire

$$P = [p_1 \quad p_2 \quad p_3]$$

et on peut vérifier que

$$P^* \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Exercice 4. Soit $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (resp. $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$) tel que les colonnes de U forment une base orthonormale par rapport au produit scalaire standard (resp. par rapport au produit hermitien standard).

1. Montrer que U est une matrice orthogonale (resp. unitaire).
2. Montrer que les lignes de U forment une base orthonormale de \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{C}^n).

Solution. Le cas réel est un cas particulier du cas complexe. On prouve donc uniquement le cas complexe.

Soit donc $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $U = (u_1 \dots u_n)$, $u_i \in \mathbb{C}^n \forall i$ tels que les colonnes $\{u_1, \dots, u_n\}$ de U forment une base orthonormale par rapport au produit hermitien standard, c'est-à-dire

$$u_i^T \overline{u_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors que

$$U^* U = \begin{pmatrix} \overline{u_1^T} \\ \vdots \\ \overline{u_n^T} \end{pmatrix} \cdot (u_1 \dots u_n) = I_n$$

Ceci implique que U est inversible d'inverse $U^{-1} = U^*$, i.e. U est unitaire. En particulier, si on écrit

$$U = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix}$$

où v_i^T est la i -ème ligne de U , on a que

$$I_n = UU^* = \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix} \cdot (\overline{v_1} \ \dots \ \overline{v_n})$$

ce qui est équivalent à

$$v_i^T \overline{v_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'ensemble des lignes $\{v_1, \dots, v_n\}$ de U forme donc un ensemble orthonormal. En particulier, c'est un ensemble libre et donc une base du \mathbb{C} -espace vectoriel \mathbb{C}^n (et si $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, c'est aussi une base du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^n).

Exercice 5. Soit V un espace vectoriel sur \mathbb{C} de dimension 3 et $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base de V . Pour les matrices $A_i \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ ci-dessous et les applications définies par $f_i(x, y) = [x]_B^T A_i \overline{[y]_B}$, cocher ce qui s'applique :

	A_1	A_2	A_3
$f_i(x, y)$ est une forme sesquilinéaire	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f_i(x, y)$ est une forme hermitienne	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1+2 \cdot i & 3-i \\ 1-2 \cdot i & 0 & 2-i \\ 3-i & 2+i & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer pour les formes hermitiennes, s'il s'agit d'un produit hermitien.

Solution. En utilisant les propriétés de l'addition et multiplication par un scalaire des matrices, on voit que les trois applications sont sesquilinéaires. Comme A_1 est la seule matrice hermitienne, on déduit que f_1 est la seule forme hermitienne. Ainsi on trouve le tableau suivant:

	A_1	A_2	A_3
$f_i(x, y)$ est une forme sesquilinéaire	oui	oui	oui
$f_i(x, y)$ est une forme hermitienne	oui	non	non

Exercice 6. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ des matrices symétriques dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Montrer que toutes les valeurs propres de la matrice $A + B$ sont aussi strictement positives.

Solution. Comme A et B ont seulement des valeurs propres positives, les formes quadratiques $Q_A(x)$ et $Q_B(x)$ définies par $Q_A(x) = x^T A x$ et $Q_B(x) = x^T B x$ sont définies positives. Maintenant, soit Q_{A+B} définie par $Q_{A+B}(x) = x^T (A + B)x$. Alors $Q_{A+B}(x) = Q_A(x) + Q_B(x) > 0$ pour tous vecteurs x non nul, donc Q_{A+B} est une forme définie positive, et cela signifie que la matrice $A + B$ possède seulement des valeurs propres positives.

Exercice 7. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique définie positive, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de A sont positives. Montrer qu'il existe une matrice symétrique définie positive $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $A = B^T B$.

Solution. A est une matrice symétrique donc il existe une matrice orthogonale P telle que

$$P^T \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sont les valeurs propres de A . Soit D la matrice $P^T A P$ diagonale. Comme A est définie positive, on a $\lambda_i > 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$ et alors $D = C^T C$, où

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Comme $P^T = P^{-1}$, on obtient que

$$A = P D P^T = P C^T C P^T = P C^T P^T P C P^T = (P C^T P^T) (P C P^T) = (P C P^T)^T (P C P^T).$$

ainsi $A = B^T B$, où $B = P C P^T$. Il reste à montrer que B est vraiment symétrique et définie positive. Les valeurs propres de B sont les mêmes de que les valeurs propres de C , donc B est définie positive. De plus,

$$B^T = (P C P^T)^T = (P^T)^T C^T P^T = P C P^T = B.$$

Exercice 8. Modifier l'algorithme du cours afin qu'il calcule une matrice diagonale congruente complexe par rapport à une matrice hermitienne $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Appliquer ensuite l'algorithme à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6i & -5 + i \\ -6i & 16 & 3 + 14i \\ -5 - i & 3 - 14i & 12 \end{pmatrix}$$

pour trouver une matrice inversible $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telle que $P^T A \bar{P}$ est une matrice diagonale avec des coefficients réels.

Solution. On se rappelle que deux matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sont congruentes complexes s'il existe une matrice inversible $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telle que $A = P^T \cdot B \cdot \bar{P}$. Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice hermitienne. On modifie l'algorithme de la manière suivante :

Pour $1 \leq i \leq n$, la i -ème itération est comme suit :

- S'il existe un indice $j \geq i$ tel que $b_{jj} \neq 0$ soit $j \geq i$ le plus petit tel indice. On échange la i -ème ligne et la j -ème ligne et après la i -ème colonne et la j -ème colonne.
- Si $b_{ii} = 0$, soit $j \in \{i+1, \dots, n\}$ tel que $b_{ij} \neq 0$. Si un tel indice n'existe pas on procède à la $i+1$ -ème itération. On additionne la ligne j sur la ligne i et on additionne la colonne j sur la colonne i . Étant donné que $\text{char}(K) \neq 2$, on a alors maintenant $b_{ii} = 2b_{ij} \neq 0$.
- Pour chaque $j \in \{i+1, \dots, n\}$: On additionne $-\overline{b_{ij}}/b_{ii}$ fois la i -ème ligne sur la j -ème ligne et on additionne $-b_{ij}/b_{ii}$ fois la i -ème colonne sur la j -ème colonne.

Lorsqu'on applique cet algorithme à la matrice A donnée, on trouve

$$P^T A \overline{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

pour

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3i & 2+i \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ 10 \end{pmatrix}$. Alors, la solution des moindres

carrés $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ du problème $\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|^2$ satisfait

a) $x_2 = 3$.

b) $x_2 = -3$.

c) $x_2 = 4$.

d) $x_2 = -4$.

Solution. Réponse d). On utilise Gram-Schmidt comme dans le théorème du cours ou bien on résout le système $A^T A x = A^T b$ pour trouver la solution

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

De manière alternative, on peut étudier $\|Ax - b\|^2$ en remplaçant x_2 par 3, -3, 4 et -4, ce qui donne quatre polynômes du second degré avec variable x_1 . On trouve alors que le polynôme avec $x_2 = -4$ possède l'unique minimum global minimal parmi les quatre polynômes.

Exercice 10. Pour chaque forme bilinéaire symétrique suivante Q , décider si Q est définie positive, définie négative ou indéfinie. Si Q est indéfinie, trouver un vecteur x tel que $Q(x) > 0$ et un vecteur y tel que $Q(y) < 0$.

a) $Q(x) = 13x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$

b) $Q(x) = 11x_1^2 + 16x_1x_2 - x_2^2$

Solution. a) On a que $Q(x) = x^T Ax$ où $A = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda I) = (13 - \lambda)(7 - \lambda) - 16 = \lambda^2 - 20\lambda + 75 = (\lambda - 15)(\lambda - 5)$$

ainsi les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 15$ et $\lambda_2 = 5$. Comme toutes les valeurs propres de A sont positives, A est définie positive, et donc la forme quadratique Q est définie positive.

b) Similairement, $Q(x) = x^T Ax$ où $A = \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$. Comme en a), on trouve que le polynôme caractéristique de A est

$$\det(A - \lambda I) = (11 - \lambda)(-1 - \lambda) - 64 = \lambda^2 - 10\lambda - 75 = (\lambda - 15)(\lambda + 5)$$

et les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 15$ et $\lambda_2 = -5$. Cela signifie que A et $Q(x)$ sont indéfinies. Pour trouver des vecteurs x et y qui satisfont $Q(x) > 0$ et $Q(y) < 0$, on cherche les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres λ_1 et λ_2 . On trouve $x = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $y = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Finalement, on vérifie que x et y sont les vecteurs satisfaisant:

$$Q(x) = x^T Ax = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{30}{\sqrt{5}} \\ \frac{15}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = 15 > 0$$

et similairement

$$Q(y) = y^T Ay = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-5}{\sqrt{5}} \\ \frac{10}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = -5 < 0.$$

Exercice 11. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Si U dénote un sous-espace de \mathbb{R}^n , montrer que

$$\lambda_k = \min_{\dim(U)=n-k+1} \max_{x \in U \cap S^{n-1}} x^T Ax.$$

Solution. Soit $\{u_1, \dots, u_n\}$ une base orthonormale de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ respectivement. On fixe un entier k . Soit U un espace de dimension $n - k + 1$. Clairement, $\text{span}\{u_1, \dots, u_k\} \cap (U \cap S^{n-1}) \supsetneq \{0\}$, alors il existe un vecteur $0 \neq x = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i \in (U \cap S^{n-1})$. Comme

$$x^T Ax = \sum_{i=1}^k \alpha_i^2 \lambda_i \geq \lambda_k,$$

on a que $\max_{x \in (U \cap S^{n-1})} x^T A x \geq \lambda_k$. Comme c'est vrai pour chaque U de dimension $n - k + 1$, on conclut que

$$\min_{\dim(U)=n-k+1} \max_{x \in (U \cap S^{n-1})} x^T A x \geq \lambda_k.$$

Si on prend $W = \text{span}\{u_k, \dots, u_n\}$, pour chaque vecteur $x = \sum_{i=k}^n \beta_i u_i \in W \cap S^{n-1}$ (c'est-à-dire $\sum_{i=k}^n \beta_i^2 = 1$), on a

$$x^T A x = \sum_{i=k}^n \beta_i^2 \lambda_i \leq \lambda_k$$

et $u_k^T A u_k = \lambda_k$. Donc $\max_{x \in W \cap S^{n-1}} x^T A x = \lambda_k$ et

$$\min_{\dim(U)=n-k+1} \max_{x \in U \cap S^{n-1}} x^T A x \leq \max_{x \in W \cap S^{n-1}} x^T A x = \lambda_k.$$

Finalement, on conclut que $\lambda_k = \min_{\dim(U)=n-k+1} \max_{x \in U \setminus \{0\}} R_A(x)$.

Exercice 12. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Montrer que

$$\lambda_k = \max_{\dim(U) \leq n-k} \min_{x \in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T A x,$$

où le maximum est pris sur les sous-espaces U de \mathbb{R}^n .

Solution. Comme on a affaire à un max min, nous procédons de la manière suivante.

Soit un sous-espace $U \subseteq \mathbb{R}^n$ de dimension $n - k$. Montrons d'abord que

$$\min_{x \in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T A x \leq \lambda_k.$$

Remarquons que $\dim(U^\perp) = k$, et donc que U^\perp s'intersecte non trivialement avec l'espace engendré par $\{u_k, \dots, u_n\}$, les vecteurs propres du théorème spectral associés aux valeurs $\lambda_n, \dots, \lambda_k$. Pour n'importe quel vecteur unitaire w dans cette intersection, on trouve explicitement

$$w^T A w \leq \lambda_k.$$

Il suit alors que

$$\max_{\dim(U)=n-k} \min_{x \in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T A x \leq \lambda_k,$$

et il ne reste plus qu'à trouver un espace vectoriel U explicitement qui réalise le maximum.

Le cours ou la justification de l'exercice ci-dessus nous mènent naturellement à considérer le U tel que $U^\perp = \text{span}\{u_1, \dots, u_k\}$. Celui-ci vérifie $\min_{x \in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T A x = \lambda_k$, comme voulu.

Pour conclure, si $\dim(U) < n - k$, alors $\dim(U^\perp) > k$. Il existe donc un V de dimension k tel que $V \subset U^\perp$. Le minimum est ainsi pris sur U^\perp , un espace plus grand que V , et sa valeur est alors plus petite.

$$\min_{x \in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T A x \leq \min_{x \in V \cap S^{n-1}} x^T A x.$$

Ces plus petits espaces U n'ont donc aucune influence sur le maximum et l'égalité reste vraie si on étend le maximum à tous les espaces U de dimension inférieure ou égale $n - k$.

Exercice 13. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. On définit l'ordre partiel \geq sur les matrices par

$$R \geq S \text{ sur } V \iff x^T R x \geq x^T S x \quad \forall x \in V.$$

Posons $N_A(\lambda)$ le nombre de valeurs propres de A inférieures ou égales à λ . Montrer les équivalences suivantes.

1. $N_A(\lambda) \leq k \iff \lambda_{n-k} > \lambda$, et
2. $N_A(\lambda) \geq k \iff \lambda_{n-k+1} \leq \lambda$.

En déduire, à l'aide des deux exercices précédents, les propositions suivantes.

1. S'il existe un $\delta > 0$ et une matrice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec $\text{rang}(Q) \leq k$ vérifiant $A \geq (\lambda + \delta)I - Q$ sur \mathbb{R}^n , alors $N_A(\lambda) \leq k$.
2. Si pour chaque $\delta > 0$ il existe un sous-espace $V \subseteq \mathbb{R}^n$ avec $\dim(V) \geq k$ vérifiant $A \leq (\lambda + \delta)I$ sur V , alors $N_A(\lambda) \geq k$.

Solution. Nous montrons uniquement les deux propositions à l'aide des équivalences.

1. Il s'agit ici de montrer que $\lambda_{n-k} > \lambda$. Utilisons donc la relation du type $\max \min$ d'un autre exercice de cette série. Pour pouvoir conclure, il faut alors trouver un espace vectoriel U de dimension au plus k tel que

$$\min_{x \in U^\perp \cap S^{n-1}} x^T A x > \lambda.$$

L'hypothèse sur A nous donne

$$x^T A x \geq \lambda + \delta - x^T Q x,$$

pour n'importe quel x unitaire de U^\perp .

Prenons donc $U = \text{Im}(Q)$, de sorte que $U^\perp = \ker(Q^T)$. Par suite, on a

$$\lambda_{n-k} \geq \min_{x \in \ker(Q^T) \cap S^{n-1}} x^T A x \geq \lambda + \delta > \lambda,$$

ce qui conclut.

2. Montrons que $\lambda_{n-k+1} \leq \lambda$. Par le même raisonnement que ci-dessus, et grâce à un autre exercice de cette série,

$$\max_{x \in U \cap S^{n-1}} x^T A x \geq \lambda_{n-k+1},$$

pour n'importe quel sous-espace U de dimension k .

Or, par hypothèse,

$$x^T A x \leq \lambda + \delta,$$

pour tout $\delta > 0$ et x unitaire de V . En restreignant V à un sous-espace U de dimension k , on trouve bien,

$$\lambda_{n-k+1} \leq \max_{x \in U \cap S^{n-1}} x^T A x \leq \max_{x \in V \cap S^{n-1}} x^T A x \leq \lambda + \delta.$$

L'inégalité étant vraie pour tout $\delta > 0$, le résultat est démontré.

Exercice 14. (*) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique.

Montrer, à partir d'un résultat de la série 7¹, que A est semi-définie positive si et seulement si tous ses mineurs symétriques sont positifs ou nuls, c'est-à-dire $\det(A_I) \geq 0$ pour tout $I \subseteq \{1, \dots, n\}$.

Solution.

¹Le coefficient $n - k$ du polynôme caractéristique de A vérifie

$$a_{n-k} = (-1)^{n-k} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \det(A_I),$$

où A_I est la sous-matrice obtenue en extrayant les lignes et les colonnes de A d'indice dans I .