
Algèbre linéaire avancée II
printemps 2026

Série 8

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice hermitienne et $u, v \in \mathbb{C}^n$ deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes. Montrer que u et v sont orthogonaux par rapport au produit hermitien standard.

Exercice 2. Contraposée du théorème spectral.

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit hermitien standard sur \mathbb{C}^n (c'est-à-dire $\langle x, y \rangle = x^T \bar{y}$ pour tous $x, y \in \mathbb{C}^n$) et soit $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une matrice diagonalisable telle que :

- i) chaque valeur propre est réelle, et
- ii) pour tout couple (u, v) de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes, $\langle u, v \rangle = 0$.

Montrer que A se diagonalise dans une base orthonormale. En déduire que A est hermitienne.

Exercice 3. Soit A la matrice hermitienne

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 - i & -3i \\ 2 + i & 0 & 1 - i \\ 3i & 1 + i & 0 \end{bmatrix}.$$

Trouver une matrice unitaire $P \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ telle que $P^* A P$ est une matrice diagonale.

Exercice 4. Soit $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (resp. $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$) tel que les colonnes de U forment une base orthonormale par rapport au produit scalaire standard (resp. par rapport au produit hermitien standard).

1. Montrer que U est une matrice orthogonale (resp. unitaire).

2. Montrer que les lignes de U forment une base orthonormale de \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{C}^n).

Exercice 5. Soit V un espace vectoriel sur \mathbb{C} de dimension 3 et $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base de V . Pour les matrices $A_i \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ ci-dessous et les applications définies par $f_i(x, y) = [x]_B^T A_i [y]_B$, cocher ce qui s'applique :

	A_1	A_2	A_3
$f_i(x, y)$ est une forme sesquilinéaire	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$f_i(x, y)$ est une forme hermitienne	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1+i & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1+2 \cdot i & 3-i \\ 1-2 \cdot i & 0 & 2-i \\ 3-i & 2+i & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer pour les formes hermitiennes, s'il s'agit d'un produit hermitien.

Exercice 6. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ des matrices symétriques dont toutes les valeurs propres sont strictement positives. Montrer que toutes les valeurs propres de la matrice $A + B$ sont aussi strictement positives.

Exercice 7. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique définie positive, c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de A sont positives. Montrer qu'il existe une matrice symétrique définie positive $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que $A = B^T B$.

Exercice 8. Modifier l'algorithme du cours afin qu'il calcule une matrice diagonale conjuguée complexe par rapport à une matrice hermitienne $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Appliquer ensuite l'algorithme à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6i & -5+i \\ -6i & 16 & 3+14i \\ -5-i & 3-14i & 12 \end{pmatrix}$$

pour trouver une matrice inversible $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telle que $P^T A \bar{P}$ est une matrice diagonale avec des coefficients réels.

Exercice 9. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ 10 \end{pmatrix}$. Alors, la solution des moindres

carrés $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ du problème $\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|^2$ satisfait

a) $x_2 = 3$.

c) $x_2 = 4$.

b) $x_2 = -3$.

d) $x_2 = -4$.

Exercice 10. Pour chaque forme bilinéaire symétrique suivante Q , décider si Q est définie positive, définie négative ou indéfinie. Si Q est indéfinie, trouver un vecteur x tel que $Q(x) > 0$ et un vecteur y tel que $Q(y) < 0$.

a) $Q(x) = 13x_1^2 + 8x_1x_2 + 7x_2^2$

b) $Q(x) = 11x_1^2 + 16x_1x_2 - x_2^2$

Exercice 11. (*) Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique.

Montrer, à partir d'un résultat de la série 7¹, que A est semi-définie positive si et seulement si tous ses mineurs symétriques sont positifs ou nuls, c'est-à-dire $\det(A_I) \geq 0$ pour tout $I \subseteq \{1, \dots, n\}$.

¹Le coefficient $n - k$ du polynôme caractéristique de A vérifie

$$a_{n-k} = (-1)^{n-k} \sum_{\substack{I \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |I|=k}} \det(A_I),$$

où A_I est la sous-matrice obtenue en extrayant les lignes et les colonnes de A d'indice dans I .