Algèbre linéaire avancée II
printemps 2025

Série 9

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique semi-définie positive.

a) Montrer que les éléments diagonaux a_{ii} de A sont tous positifs ou nuls.

b) Montrer que $a_{ii}a_{jj} \geq a_{ij}^2\ \forall i, j$. En déduire que si $a_{ii} = 0$ pour un certain indice i, alors la i-ème ligne et la i-ème colonne de A sont nulles.

c) Montrer que si $a_{ii}a_{jj} = a_{ij}^2$ pour une certaine paire d'indices i, j distincts, alors A est singulière.

d) Montrer que si $x^T Ax = 0$, alors $Ax = 0$.

Exercice 2. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne définie positive, et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur unitaire. Montrer que $(x^*Ax)^{-1} \leq x^*A^{-1}x$ avec égalité si et seulement si x est un vecteur propre de A.

Indices : Exprimer les images x^*Ax et $x^*A^{-1}x$ dans une base orthonormale de vecteurs propres de A. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2$ pour des réels a_i, b_i bien choisis.

Exercice 3. Soit $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Montrer que $||Ax||_2 \leq ||A||_F ||x||_2$, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$. En déduire que $||AB||_F \leq ||A||_F ||B||_F$.

Exercice 4. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ une matrice hermitienne. Montrer que le polynôme caractéristique de A est réel.

Définissons la norme de Frobenius sur $\mathbb{C}^{n\times n}$ par $||A||_F^2 := \sum_{ij} |A_{ij}|^2$. Montrer que $||A||_F^2 = \mathrm{Tr}(A^2)$, et en déduire que si $|\mathrm{Tr}(A)| < ||A||_F$, alors A est indéfinie.

Exercice 5. Déterminer les valeurs singulières des matrices suivantes. Pour les matrices A_3 à A_6, donner aussi la décomposition en valeurs singulières (SVD).

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier votre réponse.

1. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice orthogonale, alors une décomposition de A en valeurs singulières est $A = AI_nI_n$.
2. Les valeurs singulières d'une matrice diagonale $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur la diagonale sont les valeurs diagonales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Exercice 7. Soit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Montrer que sa plus grande valeur singulière σ_1 domine toutes ses valeurs propres λ : $\sigma_1 \geq |\lambda|$.

Exercice 8. Calculer la matrice pseudo-inverse des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9. Trouver, à l'aide de la pseudo-inverse, la solution minimale des trois systèmes d'équations:

$$1.\ x_1 + x_2 = b_1\,, \quad 2. \begin{cases} x_1 = b_1\,, \\ x_1 = b_2\,, \\ x_1 = b_3\,, \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 4x_1 = b_1\,, \\ 0x_1 = b_2\,, \\ 7x_3 = b_3\,, \\ 0x_2 = b_4\,. \end{cases}$$

Exercice 10. Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $A \in K^{m\times n}$ et $B \in K^{n\times p}$. Est-il toujours vrai que $(AB)^+ = B^+A^+$?

Exercice 11. (*) Soit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice symétrique et soit

$$A = U \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U^T$$

une factorisation de A telle que $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est orthogonale et $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$. Pour $1 \leq \ell < n$, montrer qu'on a

$$\max_{\substack{x\in S^{n-1} \\ x\perp u_1,\dots,x\perp u_\ell}} x^T A x = \lambda_{\ell+1}$$

et $u_{\ell+1}$ est une solution optimale.