
Algèbre linéaire avancée II
printemps 2026

Série 6

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Transformez les matrices réelles suivantes en matrices diagonales dont les éléments sont 0, 1 et -1 . Combien de 0, 1 et -1 sont sur la diagonale ? (Ces quantités sont appelées l'indice de nullité, l'indice de positivité et l'indice de négativité.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Soit V un espace vectoriel sur K avec une base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une forme bilinéaire symétrique, et $P \in K^{n \times n}$ inversible telle que $P^T A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle} P$ est une matrice diagonale.

1. Montrer que les éléments $u_k \in V$ tels que $[u_k]_B = P_k$, où P_k est la k -ième colonne de P , forment une base orthogonale de V .
2. Soit maintenant V un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}_3$, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base V et $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}_3$ une forme bilinéaire symétrique telle que

$$A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base orthogonale de V .

Exercice 3. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ la forme bilinéaire symétrique

$$\langle x, y \rangle = x^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y.$$

Montrer que $\mathbb{Z}_2^2$ ne possède pas de base orthogonale.

Exercice 4. Soient V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ un ensemble de vecteurs deux à deux orthogonaux.

1. Montrer le *théorème de Pythagore généralisé* :

$$\|v_1 + \dots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \dots + \|v_n\|^2.$$

2. Montrer que $\{v_1, \dots, v_n\}$ est un ensemble libre si pour tout i , $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$.

Exercice 5. Soit V un espace euclidien de dimension finie avec une base orthonormale $B = \{v_1, \dots, v_n\}$.

1. Montrer que pour tout $v \in V$ on a

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i.$$

2. Pour $f, g \in V$, montrer l'*identité de Parseval* :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^n \langle f, v_i \rangle \langle v_i, g \rangle.$$

Exercice 6. 1. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire. Montrer que $V = W \oplus W^\perp$ est satisfait pour tout sous-espace $W \subseteq V$. Conclure que $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$.

2. Soit V un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, et soient $f, g \in V^* \setminus \{0\}$ deux fonctionnelles linéairement indépendantes. Montrer que

$$\dim(\ker f \cap \ker g) = n - 2.$$

Rappel : Si V est un espace vectoriel sur un corps K , son espace dual V^* est l'ensemble des applications linéaires $\phi : V \rightarrow K$, muni de l'addition et de la multiplication scalaire usuelles.

Exercice 7. Soit K un corps, V un K -espace vectoriel et soit $f : V \rightarrow V$ une application linéaire supposée diagonalisable.

Définition : Un sous-espace vectoriel $W \subseteq V$ est dit *invariant* par f si $f(W) \subseteq W$.

Soit W un sous-espace de V invariant par f . Montrer que la restriction de f à W , $f|_W : W \rightarrow W$, est également diagonalisable.¹

¹Remarquez que $V = \bigoplus_\lambda E_\lambda$, où les E_λ sont les différents espaces propres. Montrez que $W = \bigoplus_\lambda (E_\lambda \cap W)$.

Exercice 8. Soient K un corps, V un K -espace vectoriel et f, g deux endomorphismes sur V .

Définition : Deux applications linéaires f, g sont *simultanément diagonalisables* s'il existe une base commune de vecteurs propres de f et g .

Montrer que si f et g sont simultanément diagonalisables, alors f et g commutent.

Exercice 9. (*) Montrer la contraposée de l'exercice 8 : si f et g sont diagonalisables et commutent, alors f et g sont simultanément diagonalisables.