Algèbre linéaire avancée II
printemps 2026

Série 6 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Transformez les matrices réelles suivantes en matrices diagonales dont les éléments sont $0, 1$ et -1. Combien de 0, 1 et -1 sont sur la diagonale ? (Ces quantités sont appelées l'indice de nullité, l'indice de positivité et l'indice de négativité.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution.

1. *On va utiliser l'algorithme du cours. On additionne -2 fois la première ligne sur la deuxième ligne pour obtenir*
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$
et -2 fois la première colonne sur la deuxième colonne pour obtenir la matrice diagonale
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$
Finalement, on multiplie la deuxième colonne par $1/5$ et on a
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
L'indice de nullité est donc $r_0 = 0$, l'indice de positivité est $r_+ = 1$, et l'indice de négativité est $r_- = 1$.

2. *On additionne -1 fois la première ligne sur la deuxième ligne:*
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
On additionne -1 fois la première colonne sur la deuxième colonne :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Donc l'indice de nullité est $r_0 = 1$, l'indice de positivité est $r_+ = 1$ et l'indice de négativité est $r_- = 0$.

3. *On additionne -2 fois la première ligne sur la deuxième ligne et après -2 fois la première colonne sur la deuxième colonne pour obtenir :*

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

On additionne -1 fois la première ligne sur la troisième ligne et après -1 fois la première colonne sur la troisième colonne pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

On additionne $-3/5$ fois la deuxième ligne sur la troisième ligne et et après $-3/5$ fois la deuxième colonne sur la troisième pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}$$

On multiplie la première colonne par $1/2$, la deuxième colonne par $1/5$ et la troisième colonne par $5/4$ pour avoir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc l'indice de nullité est $r_0 = 0$, l'indice de positivité est $r_+ = 2$, et l'indice de négativité est $r_- = 1$.

Exercice 2. Soit V un espace vectoriel sur K avec une base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ une forme bilinéaire symétrique, et $P \in K^{n \times n}$ inversible telle que $P^T A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle} P$ est une matrice diagonale.

1. Montrer que les éléments $u_k \in V$ tels que $[u_k]_B = P_k$, où P_k est la k-ième colonne de P, forment une base orthogonale de V.
2. Soit maintenant V un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}_3$, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base V et $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{Z}_3$ une forme bilinéaire symétrique telle que

$$A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer une base orthogonale de V.

Solution. *1. Soient* $D = P^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} P$ *une matrice diagonale, et* $u_k \in V$ *tels que* $[u_k]_B = P_k$*, c'est-à-dire* $u_k = \sum_{i=1}^n P_{i,k} v_i$*. Alors,*

$$\begin{aligned}\langle u_i, u_j\rangle &= [u_i]_B^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} [u_j]_B \\ &= (P_i)^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} P_j \\ &= (Pe_i)^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} Pe_j \\ &= e_i^T (P^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} P) e_j \\ &= e_i^T D e_j \\ &= D_{i,j},\end{aligned}$$

où $D_{i,j}$ *est égale à zéro si* $i \neq j$*. Les vecteurs* u_k *sont donc orthogonaux et linéairement indépendants, parce que* P *est inversible.*

2. *On applique l'algorithme du cours. Pour trouver la matrice* P*, on reporte toutes les opérations faites sur la matrice* A *à une matrice identité* I*.*

   (a) *On commence avec* $A_0 = A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle}$*,* $P_0 = I$*.*

   (b) *On échange les lignes 1 et 3, puis les colonnes 1 et 3 de* A_0*. On fait de même sur* P_0*. On obtient*

   $$A_1 = P_1^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (c) *On additionne* $-2\ (=1)$ *fois la ligne 1 à la ligne 2 de* A_1 *et similairement pour les colonnes. On fait de même sur* P_1*. On obtient*

   $$A_2 = P_2^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (d) *On additionne* $-1\ (=2)$ *fois la ligne 1 à la ligne 3 de* A_2 *et similairement pour les colonnes. On fait de même sur* P_2*. On obtient*

   $$A_3 = P_3^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ où } P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   On a ainsi trouvé une matrice

   $$P = P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   telle que

   $$P^T A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} P = A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Une base orthogonale de V est donc donnée par les vecteurs

$$u_1 = v_3, \; u_2 = v_2 + v_3, \; u_3 = v_1 + 2v_3$$

où on a utilisé le premier point de cet exercice.

Exercice 3. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2 \to \mathbb{Z}_2$ la forme bilinéaire symétrique

$$\langle x, y \rangle = x^\intercal \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y.$$

Montrer que $\mathbb{Z}_2^2$ ne possède pas de base orthogonale.

Solution. *On note*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $v_1 = (a, b)^T$ et $v_2 = (c, d)^T$ deux vecteurs non nuls orthogonaux, i.e. tels que

$$v_1^T C v_2 = (a, b) C \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ad + bc = 0.$$

Si un des coefficients est nul, par exemple (et sans perte de généralité) si $a = 0$:

$$a = 0 \quad \Rightarrow \quad b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \quad \Rightarrow \quad d \neq 0,$$

où la 1-ère et 3-ère implications decoulent de l'hypothèse que les vecteurs sont non nuls. Par conséquent, les vecteurs sont linéairement dépendants. D'autre part, si tous les coefficients sont non nuls, on sait que $ad = bc$ parce que le corps est de caractéristique 2. Or,

$$ad = bc \Rightarrow ab^{-1} = cd^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} ab^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} cd^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = bd^{-1} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

ce qui montre que les vecteurs sont de nouveau linéairement dépendants. On conclut que si v_1, v_2 sont orthogonaux, alors les vecteurs ne sont pas libres. En particulier, il n'existe pas de base orthogonale de $\mathbb{Z}_2^2$ muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Preuve alternative : l'égalité $ad + bc = 0$ est équivalente à $ad - bc = 0$ en caractéristique 2. On reconnaît là le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}.$$

Celui-ci étant nul, la matrice n'est pas inversible et les vecteurs v_1 et v_2 ne peuvent former une base de $\mathbb{Z}_2^2$.

Exercice 4. Soient V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ un ensemble de vecteurs deux à deux orthogonaux.

1. Montrer le *théorème de Pythagore généralisé* :

$$||v_1 + \ldots + v_n||^2 = ||v_1||^2 + \ldots + ||v_n||^2.$$

2. Montrer que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est un ensemble libre si pour tout i, $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$.

Solution. *1. On va montrer que $||v_1+\ldots+v_n||^2 = ||v_1||^2+\ldots+||v_n||^2$. Par définition,*

$$\begin{aligned} ||v_1 + \ldots + v_n||^2 &= \langle v_1 + \ldots + v_n, v_1 + \ldots + v_n \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i=j \leq n} \langle v_i, v_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} ||v_i||^2 \end{aligned}$$

où dans la 3ème ligne, on a utilisé le fait que les vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

2. Supposons que l'ensemble $\{v_1 \ldots, v_n\}$ ne soit pas libre. Alors il existe des coefficients $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, non tous nuls, tels que $c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n = 0$. Soit $c_i \neq 0$ pour un certain $i \in \{1, \cdots, n\}$. Alors

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0, v_i \rangle \\ &= \langle c_1 v_1 + \ldots + c_n v_n, v_i \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n} c_j \langle v_j, v_i \rangle \\ &= c_i \langle v_i, v_i \rangle \neq 0 \end{aligned}$$

parce que $c_i \neq 0$ et $\langle v_i, v_i \rangle \neq 0$, donc on arrive à une contradiction. Alors $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est un ensemble libre.

Exercice 5. Soit V un espace euclidien de dimension finie avec une base orthonormale $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

1. Montrer que pour tout $v \in V$ on a

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i.$$

2. Pour $f, g \in V$, montrer l'*identité de Parseval* :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle f, v_i \rangle \langle v_i, g \rangle.$$

Solution. *1. Soit $v \in V$ avec $v = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k$ pour quelques $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Alors,*

$$\begin{aligned}\langle v, v_k\rangle &= \langle\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v_k\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i, v_k\rangle \\ &= \alpha_k.\end{aligned}$$

Cela implique que

$$v = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k = \sum_{k=1}^n \langle v, v_k\rangle v_k.$$

2. On utilise 1.*:*

$$\begin{aligned}\langle f, g\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n \langle f, v_k\rangle v_k, \sum_{k=1}^n \langle g, v_k\rangle v_k \right\rangle &(1)\\ &= \sum_{k=1}^n \left\langle \langle f, v_k\rangle v_k, \sum_{i=1}^n \langle g, v_i\rangle v_i \right\rangle &(2)\\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \langle \langle f, v_k\rangle v_k, \langle g, v_i\rangle v_i\rangle &(3)\\ &= \sum_{k=1}^n \langle \langle f, v_k\rangle v_k, \langle g, v_k\rangle v_k\rangle &(4)\\ &= \sum_{k=1}^n \langle f, v_k\rangle \langle g, v_k\rangle. &(5)\end{aligned}$$

Dans (2) et (3), nous avons utilisé le fait qu'une forme bilinéaire est linéaire par rapport à un élément. Dans (4) et (5), nous avons utilisé l'orthonormalité.

Exercice 6. 1. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire. Montrer que $V = W \oplus W^\perp$ est satisfait pour tout sous-espace $W \subseteq V$. Conclure que $\dim V = \dim W + \dim W^\perp$.

2. Soit V un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, et soient $f, g \in V^* \setminus \{0\}$ deux fonctionnelles linéairement indépendantes. Montrer que

$$\dim(\ker f \cap \ker g) = n - 2.$$

Rappel : Si V est un espace vectoriel sur un corps K, son espace dual V^* est l'ensemble des applications linéaires $\phi : V \longrightarrow K$, muni de l'addition et de la multiplication scalaire usuelles.

Solution. *1. Il s'agit de montrer que $V = W + W^\perp$ et que la décomposition est unique.*

Soit d'abord une base orthonormale de W : $\{b_1, \ldots, b_k\}$, qu'on obtient en appliquant Gram-Schmidt à n'importe quelle base de W. Posons $\Pi(v) =$

$\sum_{i=1}^{k}\langle b_i, v\rangle b_i$ la projection orthogonale de v sur W. On peut alors décomposer v de la manière suivante.

$$v = \Pi(v) + (v - \Pi(v)).$$

On vérifie bien sûr que $\Pi(v) \in W$ et que $v - \Pi(v) \in W^{\perp}$, ce qui montre que $V = W + W^{\perp}$.

L'unicité de la décomposition découle de l'intersection trivialle des deux ensembles. En effet, si $v \in W \cap W^{\perp}$, alors $||v||^2 = 0$ et $v = 0$ car le produit scalaire est défini positif.

2. *f et g sont des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$, et sont donc représentables dans la base canonique par des matrices F et G de $\mathbb{R}^{1\times n}$. Comme les deux fonctionnelles sont indépendantes, F^T et G^T sont indépendants en tant que vecteurs. De plus, $\ker(f) \cap \ker(g) = \ker \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}$. Cette matrice est de rang 2 et son noyau doit donc être de dimension $n - 2$.*

Exercice 7. Soit K un corps, V un K-espace vectoriel et soit $f : V \to V$ une application linéaire supposée diagonalisable.

Définition : un sous-espace vectoriel $W \subseteq V$ est dit *invariant* par f si $f(W) \subseteq W$.

Soit W un sous-espace de V invariant par f. Montrer que la restriction de f à W, $f_{|W} : W \to W$, est également diagonalisable. [1]

Solution. *Il est d'abord clair que $\bigoplus_\lambda (E_\lambda \cap W)$ est bien une somme directe car $\bigoplus_\lambda E_\lambda$ en est une.*

De plus, l'inclusion $\bigoplus_\lambda (E_\lambda \cap W) \subseteq W$ est également immédiate. Montrons donc l'inclusion inverse.

Soit $w \in W$. Décomposons w comme somme de vecteur propres

$$w = \sum_\lambda v_\lambda,$$

où $v_\lambda \in E_\lambda$. Nous cherchons à démontrer que $v_\lambda \in W$ pour chaque λ.

Indexons les valeurs propres (toutes distinctes) λ_i avec $i = 1, \ldots, k$. Remarquons que l'expression

$$f(w) - \lambda_k w = \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i - \lambda_k) v_i \in W$$

car W est invariant par f.

La somme comprend désormais un vecteur de moins qu'avant, et les coefficients devant ceux-ci sont tous non nuls.

[1] Remarquez que $V = \bigoplus_\lambda E_\lambda$, où les E_λ sont les différents espaces propres. Montrez que $W = \bigoplus_\lambda (E_\lambda \cap W)$.

On peut désormais réappliquer $f - \lambda_{k-1} id$ (id est l'application identité) pour faire disparaître v_{k-1}. En fait, en répétant le processus,

$$\left(\prod_{j=2}^{k}(f - \lambda_j id)\right)(w) = \prod_{j=2}^{k}(\lambda_1 - \lambda_j)v_1 \in W.$$

Il suit que $v_1 \in W$. Plus généralement, on peut considérer l'application

$$\left(\prod_{j \neq i} \frac{(f - \lambda_j id)}{\lambda_i - \lambda_j}\right)(w) = v_i,$$

qui implique que $v_i \in W \ \forall i$.

Une démonstration par récurrence sur le nombre de vecteurs de la décomposition de w peut également être faite.

Exercice 8. Soient K un corps, V un K-espace vectoriel et f, g deux endomorphismes sur V.

Définition : Deux applications linéaires f, g sont *simultanément diagonalisables* s'il existe une base commune de vecteurs propres de f et g.

Montrer que si f et g sont simultanément diagonalisables, alors f et g commutent.

Solution. *Dans la base commune $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ de vecteurs propres de f et g, associés aux valeurs λ_i et μ_i respectivement pour chaque i, on a simplement*

$$\begin{aligned}(f \circ g)(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i) &= f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i b_i),\\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_i \lambda_i b_i,\\ &= (g \circ f)(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i).\end{aligned}$$

Exercice 9. (*) Montrer la contraposée de l'exercice 8 : si f et g sont diagonalisables et commutent, alors f et g sont simultanément diagonalisables.

Solution.