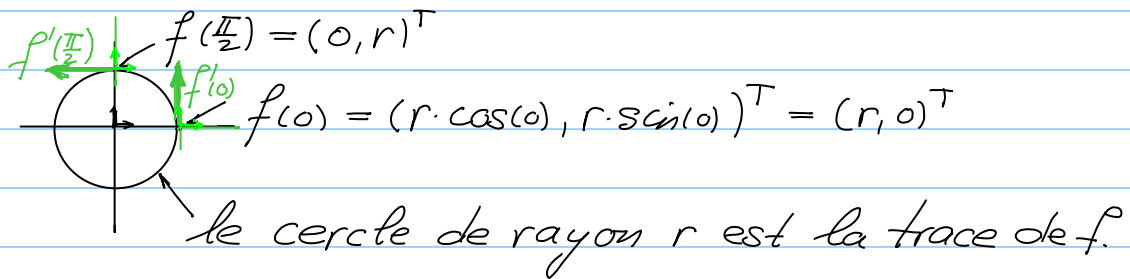


## Exemples:

1)  $I = [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ ,  $f(t) = (r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t))^T \in \mathbb{R}^2$



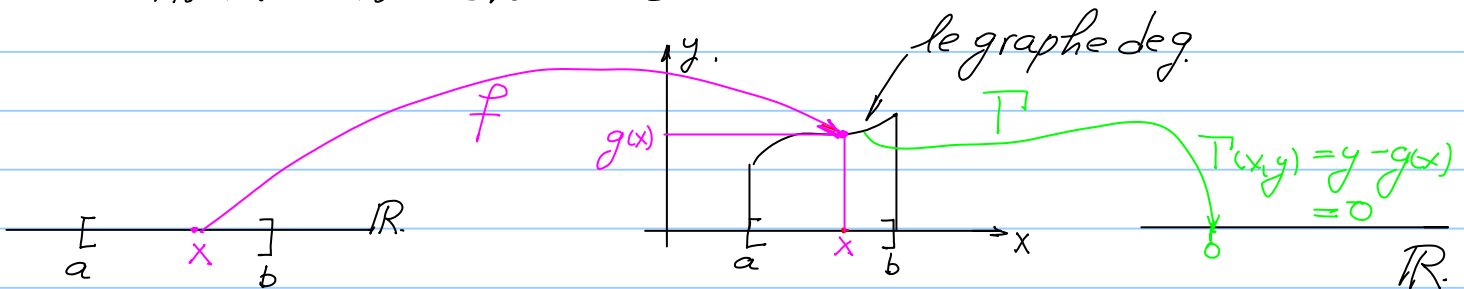
On a  $f'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t))^T$

Par exemple  $f'(0) = (0, r)^T$   
 $f'(\frac{\pi}{2}) = (-r, 0)^T$  } voir le dessin (dans des repères locaux)

Puisque  $\|f'(t)\| = \sqrt{(-r \sin(t))^2 + (r \cos(t))^2} = r$   
on trouve pour la longueur du chemin

$$l = \int_0^{2\pi} \|f'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

2) Soit  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I = [a, b]$ ,  $a < b$  une fonction continûment dérivable



Le graphe de  $g$  est aussi la trace du chemin

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (x, g(x))^T$$

On a  $f'(x) = (1, g'(x))^T$  et  $\|f'(x)\| = \sqrt{1 + g'(x)^2}$   
La longueur du graphe de  $g$  est donc

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + g'(x)^2} dx$$

longueur du graphe d'une fonction  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

## Paramétrisation par la longueur d'arc

Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a < b$ , une paramétrisation continument dérivable d'une courbe  $\gamma$  de classe  $C^1$  telle que  $\forall t \in [a, b]$ ,  $f'(t) \neq 0$ , et soit la fonction  $w: [a, b] \rightarrow [0, |\gamma|]$  définie par

$$w(t) := \int_a^t \|f'(r)\| dr = \begin{cases} \text{longueur parcourue} \\ \text{jusqu'au temps } t. \end{cases}$$

$w$  est bijective et de classe  $C^1$ , et puisque  $\forall t \in [a, b]$ ,  $f'(t) \neq 0$  on a que  $w'(t) = \|f'(t)\| \neq 0$ , et la fonction réciproque  $\sigma = w^{-1}$  est donc aussi de classe  $C^1$ . (voir le lemme).

Définition: le chemin  $c(s) = f(w^{-1}(s)) = f(\sigma(s))$ ,  $s \in [0, |\gamma|]$  est appelé la paramétrisation canonique de la courbe  $\gamma$ . On a.

$$c'(s) = f'(\sigma(s)) \cdot \sigma'(s) = f'(\sigma(s)) \frac{1}{w'(\sigma(s))} = \frac{1}{\|f'(\sigma(s))\|} f'(\sigma(s))$$

Définition: (intégrale curviligne)

Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  une paramétrisation continument différentiable d'une courbe  $\gamma$  de classe  $C^1$  et soit  $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction continue. L'intégrale.

$$W := \int_a^b \langle F(f(t)), f'(t) \rangle dt$$

↑ produit scalaire euclidien.

dans une copie locale de  $\mathbb{R}^m$  en  $f(t)$ .

est appelée intégrale curviligne de  $F$  le long de la courbe  $\gamma$ , et l'on écrit symboliquement

$$W = \int_{\gamma} F(r) \cdot dr \quad (\text{ou similaire}).$$

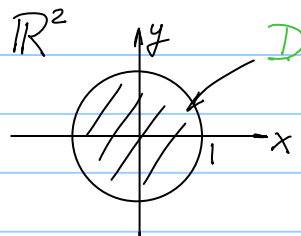
Remarque:  $W$  est indépendant de la paramétrisation au signe de l'orientation près. (à montrer !)

## 4. Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

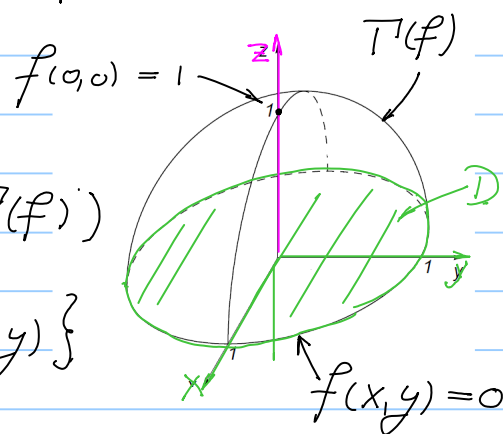
### 4.1. Introduction, définitions, exemples ( $n=2$ )

#### Exemple 1

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$



$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$



$$\text{Im}(f) = [0, 1] \quad (\text{voir le graphe } T(f))$$

$$T(f) = \{(x, y, z) \in D \times \mathbb{R} : z = f(x, y)\}$$

$$f(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \text{ t.q. } x^2 + y^2 = 1$$

$$f(0, 0) = 1$$

#### Exemple 2 (important! voir série 5A, Échauffement 2.

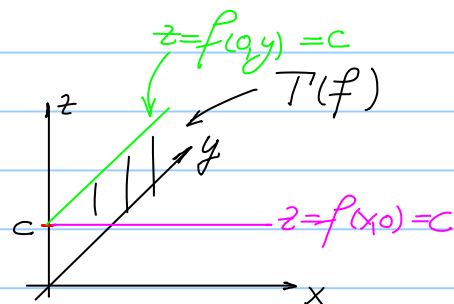
$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = a \cdot x + b \cdot y + c, \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ donnés.}$$

$$T(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : z = f(x, y)\}$$

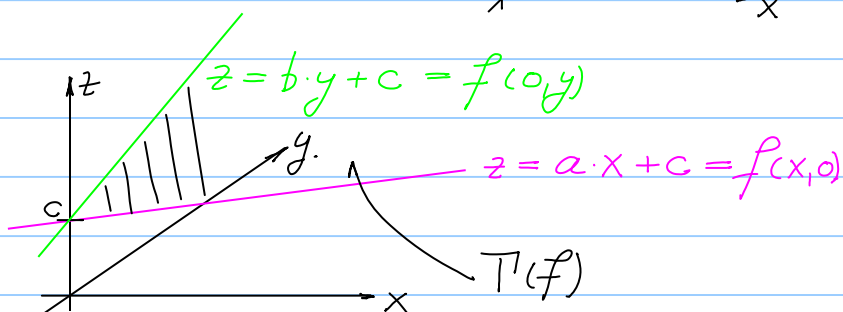
i)  $a = b = 0$ ,  $f(x, y) = c$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{Im}(f) = \{c\} \subset \mathbb{R}.$$



ii)  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$ ,

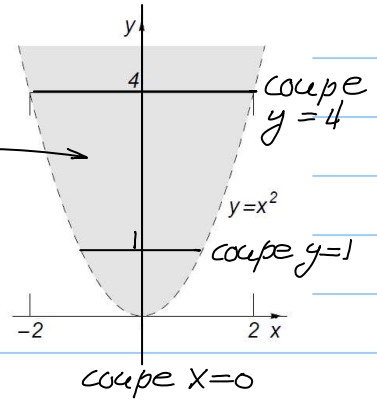
$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$$



### Exemple 3

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2 < y\}$$

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \frac{xy-1}{\sqrt{y-x^2}}$$



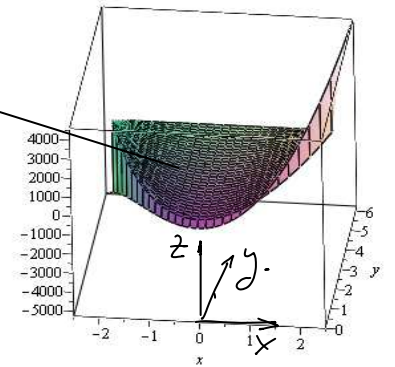
Remarque:

$D :=$  "le plus grand sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  sur lequel l'expression  $f(x,y)$  est bien définie" + éventuellement des points par un prolongement par continuité

A noter que  $D$  est un sous-ensemble ouvert et non borné (pas sous-ensemble d'une boule)

$$T(f) = \{(x,y,z) \in D \times \mathbb{R}: z = f(x,y)\}$$

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$$

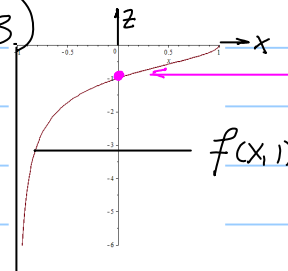


### 4.2. Techniques d'illustration.

(illustrations pour l'exemple 3)

Coupe à  $y=1$

$$f(x,1) = \frac{x-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x^2 < 1$$

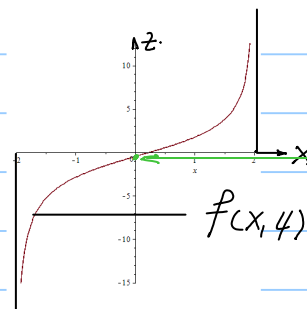


$$f(0,1) = -1$$

les mêmes points du graphe

Coupe à  $y=4$

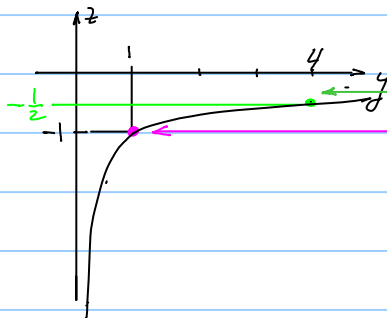
$$f(x,4) = \frac{4x-1}{\sqrt{4-x^2}}, \quad x^2 < 4$$



$$f(0,4) = \frac{1}{2}$$

Coupe à  $x=0$

$$f(0,y) = \frac{-1}{\sqrt{|y|}} \quad , y > 0$$



### 4.3. Ensembles de niveau

Définition: soit une fonction  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $D \subset \mathbb{R}^n$ , le domaine de définition de  $f$ , et soit  $c \in \text{Im}(f)$ . Alors l'ensemble

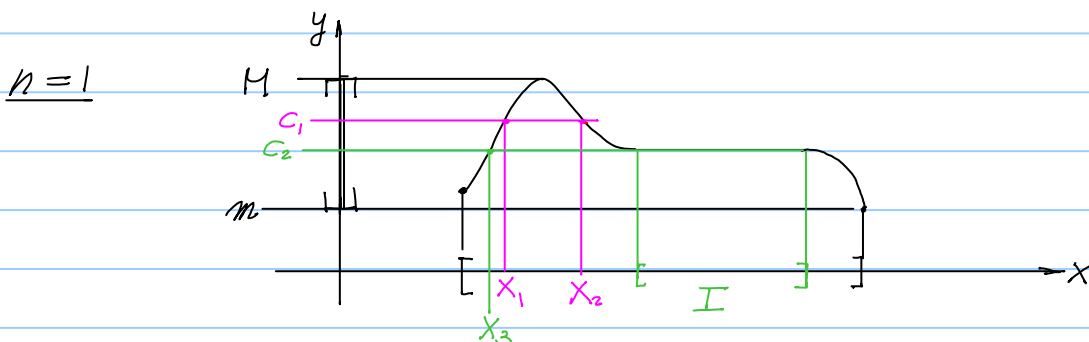
$$f^{-1}(c) := \{ \underline{x} \in D : f(\underline{x}) = c \} \quad c \in \mathbb{D}$$

est appelé l'ensemble (de niveau de  $f$ ) de niveau  $c$

Attention (abus de notation)

- ici  $f^{-1}(c)$  est un sous-ensemble de  $D$
- si  $f$  est une fonction bijective,  $f^{-1}(c)$  est comme d'habitude l'unique élément  $\underline{x} \in D$  tel que  $f(\underline{x}) = f(f^{-1}(c)) = c$

Exemples



$$f^{-1}(c_1) = \{x_1, x_2\}$$

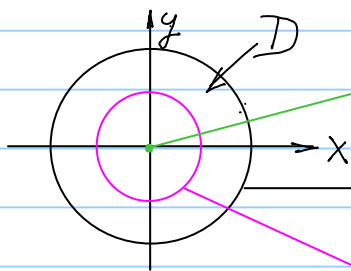
$$f^{-1}(c_2) = I \cup \{x_3\}$$

## n=2: retour aux exemples 1-3 de la section 4.1

### Exemple 1

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad \text{Im}(f) = [0, 1]$$

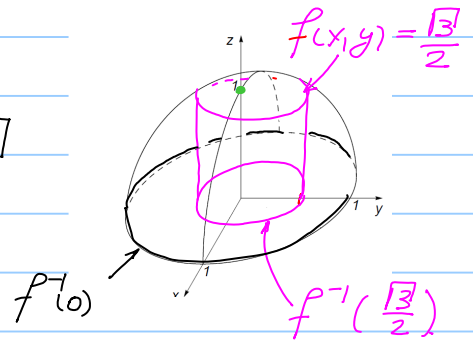


$$f^{-1}(1) = \{(0, 0)\}$$

$$f^{-1}(0) = \{(x, y) \in D : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$f^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = \{(x, y) \in D : x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}$$

$$f(x, y) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Rightarrow \frac{3}{4} = 1 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$



### Exemple 2

$$D = \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = a \cdot x + b \cdot y + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \text{ donnés}$$

i)  $a = b = 0$ ,  $\text{Im}(f) = \{c\}$

$$f^{-1}(c) = \mathbb{R}^2$$

ii)  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$ ,  $\text{Im}(f) = \mathbb{R} \ni c^*$

$$f^{-1}(c^*) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = c^*\}$$

$$\Leftrightarrow ax + by + (c - c^*) = 0$$

ce sont des droites dans le plan  $(x, y)$ .