Algèbre linéaire avancée II
printemps 2026

Série 5 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit V un espace vectoriel et soit $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ une base de V. Soit $f : V \times V \to K$ une forme bilinéaire symétrique telle que

$$f(v_1, v_1) = 2, f(v_2, v_2) = 3, f(v_3, v_3) = -1, f(v_1, v_2) = 0, f(v_2, v_3) = 1, f(v_3, v_1) = -2.$$

i) Écrire la matrice A_B^f de la forme bilinéaire f pour la base B.

ii) Trouver une base orthogonale $C = \{w_1, w_2, w_3\}$ pour V par rapport à la forme bilinéaire f.

Solution. *i)*

$$A_B^f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ii) Une base orthogonale $C = \{w_1, w_2, w_3\}$ est donnée par exemple par:

$$w_1 = v_1, w_2 = v_2, w_3 = v_1 - 1/3v_2 + v_3.$$

Il faut d'abord vérifier que ce soit une base, ce qu'on peut faire en vérifiant que les trois vecteurs sont linéairement indépendants, et après que les vecteurs sont orthogonaux, c'est-à-dire que $f(w_i, w_j) = 0 \quad \forall i \neq j$.

Exercice 2. Soit V de dimension finie et B une base de V. Montrer que deux formes bilinéaires $f, g : V \times V \to K$ sont différentes si et seulement si $A_B^f \neq A_B^g$.

Solution. *Soit n la dimension de V et $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. Les matrices A_B^f et A_B^g sont telles que*

$$(A_B^f)_{ij} = f(v_i, v_j) \quad \textit{et} \quad (A_B^g)_{ij} = g(v_i, v_j)$$

et, en plus, pour chaque $x, y \in V$

$$f(x, y) = [x]_B^T A_B^f [y]_B \quad \textit{et} \quad g(x, y) = [x]_B^T A_B^g [y]_B.$$

Or, si $A_B^f = A_B^g$, pour chaque $x, y \in V$,

$$f(x,y) = [x]_B^T A_B^f [y]_B = [x]_B^T A_B^g [y]_B = g(x,y),$$

donc les deux formes bilinéaires sont les mêmes. Si $A_B^f \neq A_B^g$, il existe $1 \leq i, j, \leq n$ où $(A_B^f)_{ij} \neq (A_B^g)_{ij}$. Alors

$$f(v_i, v_j) = (A_B^f)_{ij} \neq (A_B^g)_{ij} = g(v_i, v_j),$$

donc les deux formes bilinéaires sont différentes. On conclut que les deux formes bilinéaires f et g sont différentes si et seulement si $A_B^f \neq A_B^g$.

Exercice 3. Soit V de dimension finie et B une base de V. Montrer que une forme bilinéaire $f : V \times V \to K$ est symétrique si et seulement si A_B^f est symétrique.

Solution. *Soit n la dimension de V et $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. A_B^f est telle que $(A_B^f)_{ij} = f(v_i, v_j)$ et pour chaques $x, y \in V$, $f(x,y) = [x]_B^T A_B^f [y]_B$. Or, si A_B^f est symétrique, pour chaque $x, y \in V$,*

$$f(x,y) = [x]_B^T A_B^f [y]_B = [x]_B^T (A_B^f)^T [y]_B = \left([y]_B^T A_B^f [x]_B\right)^T = (f(y,x))^T = f(y,x),$$

car $f(x,y)$ est un scalaire, donc f est symétrique. Si A_b^f n'est pas symétrique, il existe $1 \leq i, j, \leq n$ où $(A_B^f)_{ij} \neq (A_B^f)_{ji}$ et

$$f(v_i, v_j) = (A_B^f)_{ij} \neq (A_B^f)_{ji} = f(v_j, v_i),$$

donc f n'est pas symétrique. On conclut que f est symétrique si et seulement si A_B^f est symétrique.

Exercice 4. Soit $V = \mathbb{R}_3[x]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 sur $\mathbb{R}$, muni de la forme

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x.$$

i) La forme est-elle bilinéaire ? Symétrique ? Non-dégénérée ?

ii) Décrire la matrice $A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ pour $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.

iii) Montrer que l'ensemble $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ de polynômes

$$p_0 = 1 \qquad p_1 = x$$
$$p_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \qquad p_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

est une base orthogonale de V.

Solution. *i) On vérifie simplement chacune des propriétés à l'aide des définitions du cours.*

ii)

$$A_B^{\langle\cdot,\cdot\rangle} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 2/5 \\ 2/3 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 2/7 \end{pmatrix}$$

iii) Soit $q \in V$. Nous écrivons $q = q_3x^3 + q_2^2x^2 + q_1x^1 + q_0$. Alors,

$$\begin{aligned} q &= q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x^1 + q_0 \\ &= \frac{2}{5}q_3p_3 + q_2x^2 + (q_1 + \frac{3}{5}q_3)x + q_0 \\ &= \frac{2}{5}q_3p_3 + \frac{2}{3}q_2p_2 + (q_1 + \frac{3}{5}q_3)x + (q_0 + \frac{1}{3}q_2) \\ &= \frac{2}{5}q_3p_3 + \frac{2}{3}q_2p_2 + (q_1 + \frac{3}{5}q_3)p_1 + (q_0 + \frac{1}{3}q_2)p_0. \end{aligned}$$

Cela implique que $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ est un système générateur de V et $|\{p_0, p_1, p_2, p_3\}| = \dim V$ implique que c'est une base.

On montre ensuite que $\langle p_i, p_j\rangle = 0$ pour $i \neq j$. Par exemple,

$$\begin{aligned} \langle p_2, p_3\rangle &= \int_{-1}^{1} p_2p_3 \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(3x^2 - 1)(5x^3 - 3x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{5}{2}x^6 - \frac{7}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 5. On considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^4.$$

Est-ce que $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ possède une base orthogonale par rapport à la forme bilinéaire symétrique standard ?

Solution. *La réponse est non. On considère tous les 7 vecteurs non nuls dans l'espace $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$. Il faut seulement vérifier que tout triplet de vecteurs de $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ orthogonaux forment une liste linéairement dépendante.*

Voici toutes les paires de vecteurs non nuls de $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ qui sont orthogonales (on doit aussi considérer les combinaisons linéaires des v_1, v_2 et v_3).

$$\begin{array}{ll} (v_1, v_3), & (v_1, v_1 + v_3), \\ (v_2, v_1 + v_3), & (v_3, v_1 + v_3), \\ (v_2, v_1 + v_2 + v_3), & (v_1 + v_2, v_2 + v_3), \\ (v_1 + v_2, v_1 + v_3), & (v_1 + v_3, v_2 + v_3), \\ (v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_3). & \end{array}$$

Les triplets de vecteurs de $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ *orthogonaux sont* (v_1, v_3, v_1+v_3) *et* $(v_1+v_2, v_1+v_3, v_2+v_3)$ *et on conclut facilement que ces deux listes sont linéairement dépendantes.*
Ainsi $\operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ *n'admet pas de bases orthogonales.*

Exercice 6. Soit une forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbb{R}$ telle qu'il existe deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$ vérifiants

- $\langle u, u \rangle > 0$, et
- $\langle v, v \rangle < 0$.

Montrer qu'il existe un vecteur $w \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $\langle w, w \rangle = 0$.

En déduire que le procédé de Gram-Schmidt est parfois impossible si la forme bilinéaire n'est ni définie positive, ni définie négative.

Solution. *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ *le segment entre* u *et* v *:*

$$f(t) = (1-t)u + tv.$$

L'application $t \mapsto \langle f(t), f(t) \rangle$ *est continue de* $[0,1]$ *dans* $\mathbb{R}$*, elle est strictement positive en* $t = 0$ *et strictement négative en* $t = 1$*. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un* $s \in (0,1)$ *tel que l'application s'annule.*

Le vecteur $w = (1-s)u + sv$ *est un vecteur non nul car* u *et* v *sont non colinéaires (pourquoi?).*

Le procédé de Gram-Schmidt sur la base $\{w, x\}$ *est impossible pour un* $x \in \mathbb{R}^n$ *général, par exemple, car pour que* $x - \alpha w$ *soit perpendiculaire à* w*, on devrait avoir*

$$\langle w, x - \alpha w \rangle = 0.$$

L'équation n'admet aucune solution si w *et* x *ne sont pas déjà perpendiculaires. De plus, on peut montrer assez facilement que* u *et* v *ne peuvent pas tous les deux être perpendiculaires à* w*.*

Exercice 7. Montrer que la relation de congruence $\cong$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices $K^{n\times n}$.

Rappel : Deux matrices $A, B \in K^{n\times n}$ sont *congruentes* s'il existe une matrice $P \in K^{n\times n}$ inversible telle que $A = P^T B P$.

Solution. *Pour montrer que* $\cong$ *est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices* $K^{n\times n}$*, il suffit de montrer que la relation est*

i) réflexive: $A \cong A$.

ii) symétrique: $A \cong B \Rightarrow B \cong A$.

iii) transitive: $A \cong B$ *et* $B \cong C \Rightarrow A \cong C$.

i) Réflexivité. On a que

$$A = I^T A I\,,$$

où I est la matrice identité dans l'ensemble des matrices $K^{n\times n}$. Donc $A \cong A$.

ii) Symétrie. Si $A \cong B$, $\exists\, P \in K^{n\times n}$ inversible tel que

$$A = P^T B P\,,$$

donc

$$B = P^{-T} A P^{-1}\,,$$

et $B \cong A$.

iii) Transitivité. Soit $A \cong B$ et $B \cong C$. Donc $\exists\, P, Q \in K^{n\times n}$ inversibles tels que

$$A = P^T B P \quad \text{et} \quad B = Q^T C Q\,.$$

Donc on a

$$A = P^T Q^T C Q P = (QP)^T C (QP)\,,$$

où la matrice QP est inversible puisque Q et P sont inversibles. Donc $A \cong C$.

Exercice 8. (*) Soit K un corps de caractéristique différente de 2, et V un K-espace vectoriel de dimension finie n. Considérons une forme bilinéaire f sur V qui est **anti-symétrique**, c'est-à-dire

$$f(x,y) = -f(y,x) \quad \forall x, y \in V.$$

Montrer que si f est non-dégénérée, alors n est pair.
L'implication inverse est-elle vraie ?

Solution.