Cours Euler: Corrigé 31

15 mai 2024

Exercice 1

a) La somme des angles du triangle ABC mesure 180°, donc

$$\frac{\omega}{2} + \widehat{CAB} + \widehat{ABC} = 180° \quad \text{et} \quad \beta + \widehat{DAB} + \widehat{ABD} = 180°$$

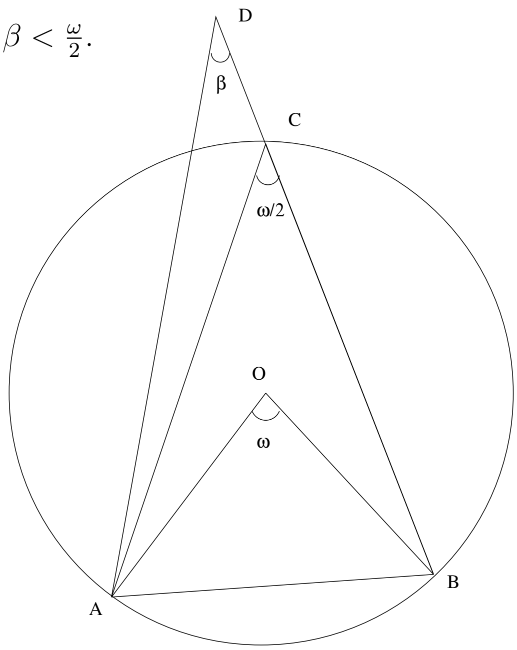
Comme $\widehat{ABC} = \widehat{ABD}$, alors

$$180 = \beta + \widehat{DAB} + \widehat{ABD} = \frac{\omega}{2} + \widehat{CAB} + \widehat{ABD}$$

donc

$$\beta + \widehat{DAB} = \frac{\omega}{2} + \widehat{CAB}$$

Comme $\widehat{DAB} > \widehat{CAB}$, alors $\beta < \frac{\omega}{2}$.



b) La somme des angles du triangle ABC mesure 180°, donc

$$\frac{\omega}{2} + \widehat{CAB} + \widehat{ABC} = 180° \quad \text{et} \quad \beta + \widehat{DAB} + \widehat{ABD} = 180°$$

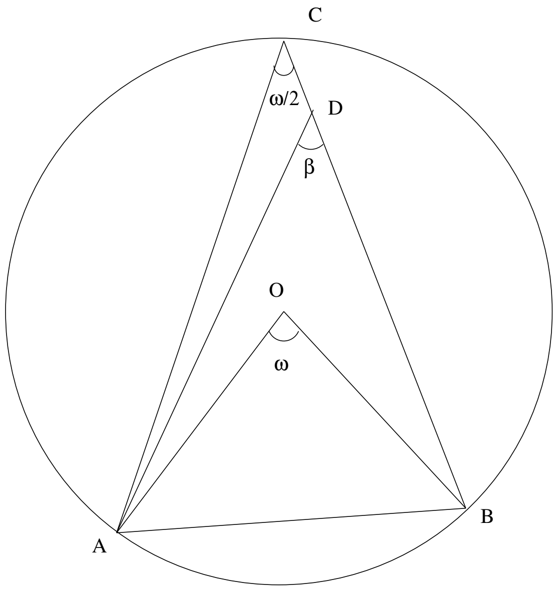
Comme $\widehat{ABC} = \widehat{ABD}$, alors

$$180 = \beta + \widehat{DAB} + \widehat{ABD} = \frac{\omega}{2} + \widehat{CAB} + \widehat{ABD}$$

donc
$$\beta + \widehat{DAB} = \frac{\omega}{2} + \widehat{CAB}$$

Comme $\widehat{BAC} < \widehat{BAD}$, alors $\beta > \frac{\omega}{2}$. L'illustration se trouve sur la page suivante.

c) Soit un point X qui n'est pas sur l'arc capable du segment AB. Soit un point Y sur l'arc capable du même côté que X par rapport au segment AB. Il y a donc deux cas possibles :
— X est à l'extérieur de l'arc contenant Y. Dans ce cas, l'angle $\widehat{AXB} < \widehat{AYB}$.
— X est à l'intérieur de l'arc contenant Y. Dans ce cas, l'angle $\widehat{AXB} > \widehat{AYB}$.
Dans les deux cas, $\widehat{AXB} \neq \widehat{AYB}$. Donc il n'y a pas d'autre point vérifiant la condition du lieu géométrique.



Exercice 2

Corrigé

212.

a) $\widehat{BAO} = 40°$ car le triangle ABO est isocèle de sommet O (côtés r)

$\widehat{BOC} = 80°$ car angle au centre de l'angle inscrit $\widehat{BAC}$

b) Le cercle de centre O qui passe par A, B et C est le cercle de Thalès du segment BC (diamètre)

$\widehat{BAC}$ mesure donc $90° \Rightarrow \alpha = 90 - 35 = 55°$

c) $\widehat{DBC} = 90 - 30 = 60°$

$\widehat{DBA} = 180 - 60 = 120°$

$\widehat{DBC} = \widehat{DEC}$ car ce sont deux angles inscrits qui coupent l'arc $\overset{\frown}{EB} \Rightarrow \widehat{CEA} = 120°$

$\widehat{DAC} = 360 - 2 \cdot (120 + 90) = 30°$

d) $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 130 = 65°$ car angle inscrit qui mesure la moitié de son angle au centre

e) Le cercle de centre O qui passe par A, B, C et D est le cercle de Thalès du segment BD (diamètre) $\Rightarrow$

$\widehat{BAD} = 90°$

$\widehat{ADB} = 90 - 32 = 58°$

$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 58°$ car ce sont des angles inscrits qui interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$

f) $\widehat{BOC} = 360 - 238 = 122°$

$\widehat{BAC} = 122 \cdot \frac{1}{2} = 61°$ car c'est un angle inscrit qui mesure la moitié de son angle au centre

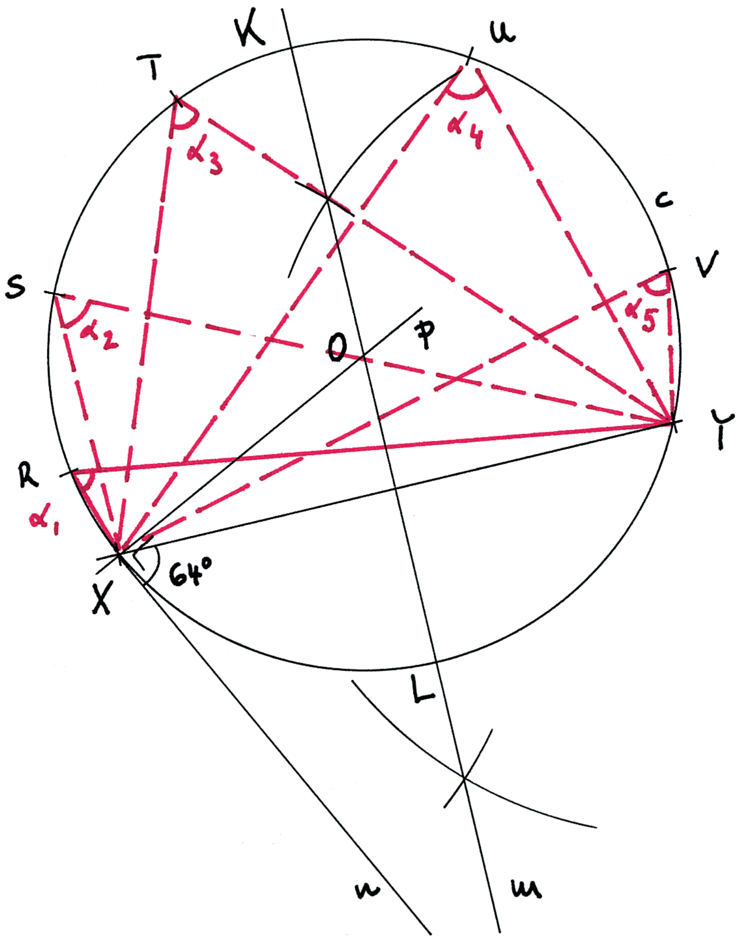
Exercice 3

Corrigé

79.

Les angles α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 mesurent tous 64° ou 116°, suivant comment sont placées les lettres R, S, T, U et V.

Ce sont des angles inscrits qui ont tous le même angle au centre $\widehat{XOY} = 128°$.



Exercice 4

Cercles de Thalès.

1) Le triangle RQS est rectangle en Q, donc $\widehat{RQS} = 90°$.

   QO est une hauteur, donc $\widehat{QOS} = 90°$.

   c est le cercle de Thalès de $[QO]$, donc $\widehat{QUO} = \widehat{QIO} = 90°$.

   Le quadrilatère $QUOI$ a trois angles rectangles, c'est donc un rectangle.

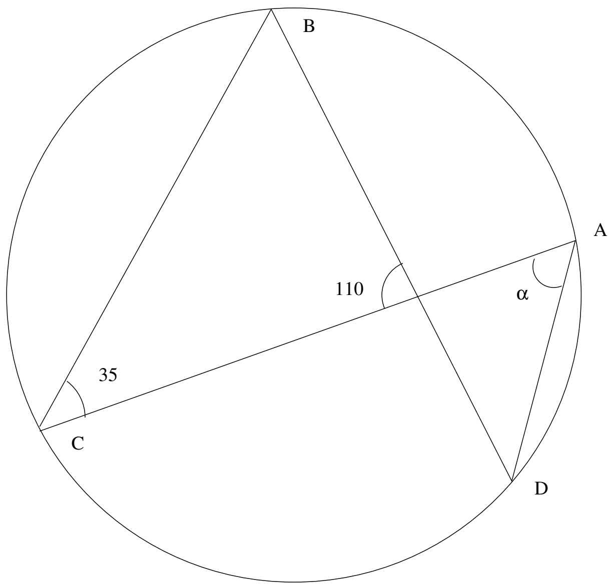
2) Les points P, B et Q sont alignés.

   Les angles $\widehat{PBA}$ et $\widehat{QBA}$ sont droits, car B se trouve sur le cercle de Thalès de $[PA]$ et $[QA]$. Donc $\widehat{PBQ} = \widehat{PBA} + \widehat{QBA} = 90 + 90 = 180°$.

Exercice 5

Exercice 141 :

a) $\alpha = 35°$ car les sommets A et B sont du même côté de la corde CD, donc $\alpha = \widehat{CBD} = 180 - 35 - 110 = 35°$ par le théorème de l'arc capable.



b) $\alpha = 180 - 70 = 110$ car l'angle α et l'angle de 70° sont de deux côtés différents d'une corde.

c) Considérons un point A sur le cercle du même côté que l'angle de 65°, tel que la droite AC contienne le point O.

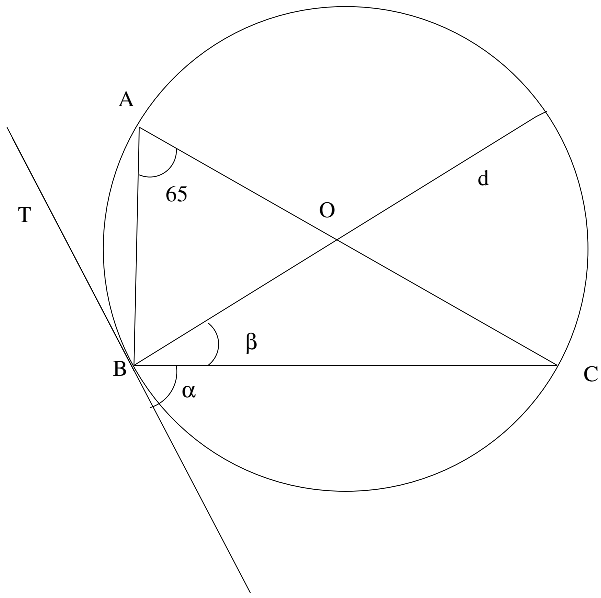
   Alors l'angle $\widehat{A}$ mesure 65° par le théorème de l'arc capable et ABC est un triangle rectangle en B, car son cercle circonscrit est le cercle de Thalès du segment $[AC]$.

   Traçons la droite d perpendiculaire à T passant par B. Comme T est la tangente, alors O appartient à d.

   Comme $[OB]$ et $[OC]$ sont des rayons du cercle, le triangle OBC est isocèle en O.

   Donc $\beta = \widehat{ACB} = 90° - 65° = 25°$.

   Comme T est tangent au cercle, alors $\alpha + \beta = 90°$, donc $\alpha = 65°$.



d) L'angle en bas à gauche mesure $180 - 35 - 90 = 55°$. Donc $\alpha = 180 - 90 - 55 = 35°$.

Exercice 142 :

Notons o le centre du cercle. Alors $\widehat{aod} = 5 \cdot 30 = 150°$.
Comme oad est un triangle isocèle en o, on a $\widehat{oad} = 15°$.
De plus oab est un triangle isocèle en o, et comme le cercle C est partagé en 12 parties isométriques, alors $\widehat{aob} = 3 \cdot \frac{360}{12} = 90°$, donc $\widehat{oab} = 45°$.
Ainsi on trouve $\widehat{eab} = \widehat{oab} - \widehat{oad} = 45 - 15 = 30°$.
Par la même méthode : $\widehat{obc} = 15°$ donc $\widehat{eba} = 45 + 15 = 60°$.
Ainsi $\widehat{aeb} = \widehat{ced} = 90°$. Ici, on peut voir que la longueur de la corde $[ab]$ est égale à celle de la corde $[cd]$, et comme e est le point d'intersection des segments $[ad]$ et $[bc]$, alors on peut appliquer le même raisonnement pour trouver $\widehat{ecd} = 30°$ et $\widehat{edc} = 60°$. L'angle $\widehat{abe}$ étant inscrit dans le même cercle et interceptant le même arc que l'angle $\widehat{edc}$, il a la même mesure.

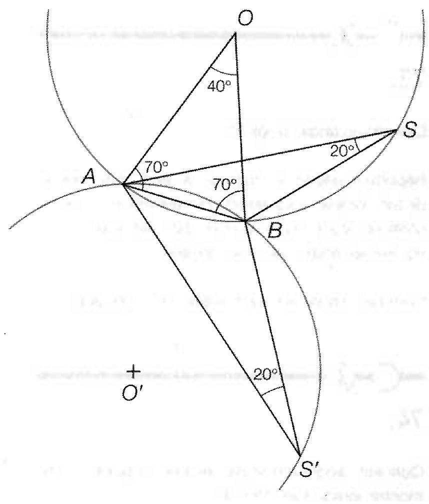
Exercice 143 :

L'angle $\widehat{aoe}$ mesure 120°, donc $\widehat{oae} = 30° = \widehat{oab}$. Comme $\widehat{aoc} = 90°$, alors $\widehat{oba} = 60°$. De plus, $\widehat{dbc} = \widehat{oba} = 60°$.
Calculons $\widehat{bcd} = \widehat{ocd}$: on a $\widehat{cof} = 120°$, donc $\widehat{ocd} = 30°$. Donc $\widehat{bdc} = 90° = \widehat{edf}$.
Pour le triangle ofe : $\widehat{foe} = 90°$, donc $\widehat{ofe} = 45°$. Comme $\widehat{ofc} = \widehat{ocd}$, alors $\widehat{cfe} = \widehat{ofe} - \widehat{ocd} = 45 - 30 = 15°$. Donc $\widehat{fed} = 75°$.

Exercice 6

Double arc capable.

1) On note α la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$. Le triangle AOB étant isocèle en O, les points A et B se trouve sur un cercle c de centre O et de rayon $\overline{OA} = \overline{OB}$. De plus, l'angle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre de ce cercle. Tous les angles inscrits dans le cercle c interceptant le même arc $\widehat{AB}$ mesure donc, par le théorème de l'angle inscrit, $\alpha/2$.



En fait, lieu géométrique des points du plan desquels on voit le segment $[AB]$ sous un angle de $\alpha/2$ est la réunion des deux arcs capables sur $[AB]$ d'angle $\alpha/2$, par le théorème de l'arc capable. Ces deux arcs de cercles s'obtiennent pour l'un en traçant le cercle de centre O et de rayon OA, et pour le second, en traçant le cercle de centre O', le symétrique de O par la réflexion d'axe AB, et de rayon OA. Voir la figure ci-dessus pour un exemple avec $\alpha = 40°$.

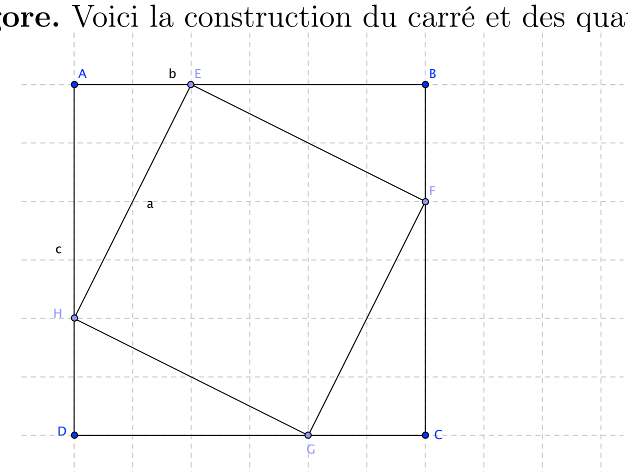
2) a) L'angle $\widehat{ATB}$ mesure 60°, car l'angle $\widehat{ACB}$ mesure 120° et est un angle au centre.

b) Les angles $\widehat{ARB}$ et $\widehat{ASB}$ mesurent aussi 60°, et pour n'importe quel point X se trouvant sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$ qui comprend T, alors $\widehat{AXB} = 60°$. En effet, tous ces points se trouvent du même côté que la corde AB. L'ensemble des points X est un des **arcs capables** d'un angle de 60° construit sur $[AB]$.

c) Sous ces points, on peut voir AB sous un angle de $180 - 60° = 120°$, par la remarque du cours qui suit le théorème de l'angle inscrit.

Exercice 7

Théorème de Pythagore. Voici la construction du carré et des quatre triangles rectangles :



Les triangles ΔAEH, ΔBFE, ΔCGF et ΔDHG sont des triangles rectangles en leur premier sommet puisque les côtés issus de ce sommet sont supportés par les côtés du carré $ABCD$. Ces côtés sont de longueur b et c. Les quatre triangles sont donc isométriques par le second cas d'isométrie (un angle isométrique compris entre deux côtés isométriques).

On déduit de cela que les hypoténuses $[EH]$, $[EF]$, $[FG]$ et $[GH]$ sont toutes isométriques. Le quadrilatère $EFGH$ est donc un losange. Pour montrer qu'il s'agit d'un carré, il faut encore montrer que ses angles sont des angles droits. On peut voir ceci de plusieurs façons.

1. Par symétrie par exemple puisqu'une rotation de 90° préserve la figure : ainsi tous les angles de ce losange sont isométriques et mesurent donc 90°.
2. Plus “terre-à-terre", on constate que la somme des angles $\widehat{AHE}+\widehat{DHG}$ vaut 90 degrés, puisqu'il s'git des deux angles non droits d'un triangle rectangle. L'angle $\widehat{EHG}$ est supplémentaire, il vaut donc aussi 90°.

Chacun des côtés de ce carré est l'hypoténuse de l'un des triangles rectangles isométriques. Il mesure donc a.

L'aire de ce carré vaut $a \cdot a = a^2$ (formule de l'aire d'un rectangle). L'aire de chacun des quatre triangles vaut $\frac{1}{2}b \cdot c = \frac{bc}{2}$. Le grand carré de côté $b+c$ a pour aire

$$(b+c) \cdot (b+c) = b^2 + 2bc + c^2$$

Par conséquent, par l'axiome de “découpage", nous savons que

$$a^2 + 4 \cdot \frac{bc}{2} = b^2 + 2bc + c^2$$

On soustrait $2bc$ de part et d'autre de cette égalité et on trouve $a^2 = b^2 + c^2$. Le Théorème de Pythagore est démontré !

Exercice 8

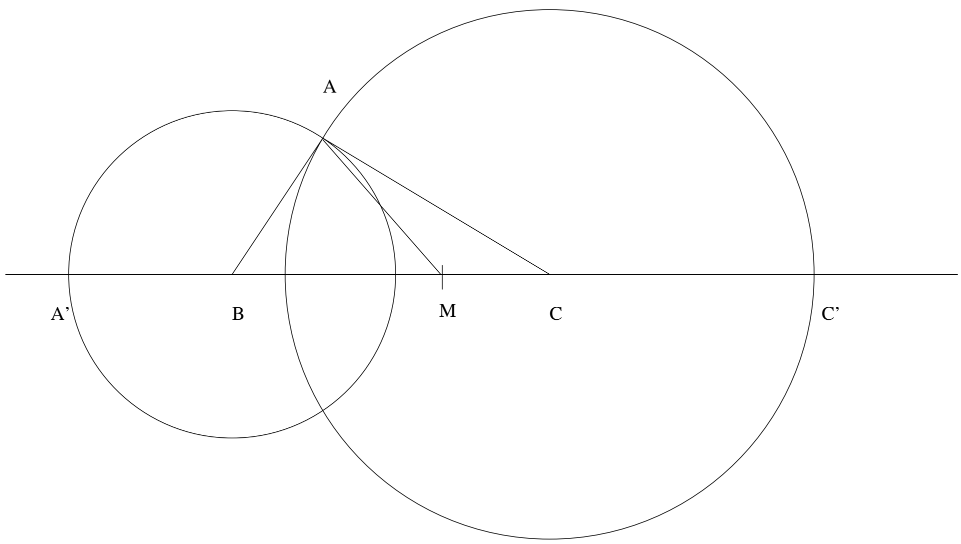
La comparaison des périmètres des triangles ABM et AMC fait apparaître que le côté $[AM]$, commun à ces deux triangles, n'a aucune influence. Dès lors la condition à respecter est

$$\overline{AB} + \overline{BM} = \overline{MC} + \overline{CA}$$

Le point M doit donc se situer au milieu d'un segment de longueur

$$\overline{AB} + \overline{BM} + \overline{MC} + \overline{CA}.$$

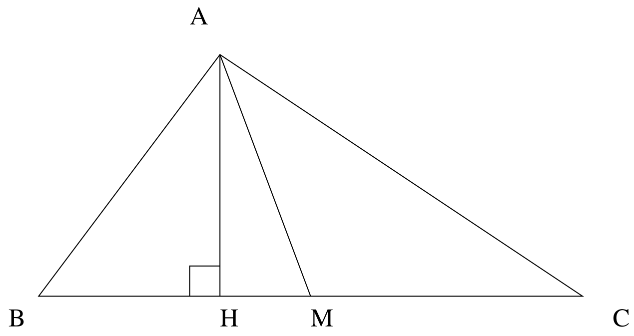
On trace donc le cercle de centre B de rayon $\overline{BA}$. On nomme A' l'intersection de ce cercle avec BC, de sorte que B se situe entre A' et C.
De même on trace le cercle de centre C et de rayon $\overline{CA}$. On nomme C' l'intersection de ce cercle avec BC, de sorte que C se situe entre B et C'. Alors M est le milieu du segment $[A'C']$.



Dans le cas des aires, le point M doit être le milieu du segment $[BC]$. En effet, considérons une hauteur AH issue de A, qui coupe BC en H. Alors

$$\text{Aire}ABM = \frac{1}{2}\overline{AH} \cdot \overline{BM} = \text{Aire}AMC = \frac{1}{2}\overline{AH} \cdot \overline{MC}$$

Donc pour que les deux aires soient égales, il faut que $\overline{BM} = \overline{MC}$, ie M est le milieu de $[BC]$.



Exercice 9

Soit x le nombre de carrés disposés horizontalement et y le nombre de carrés disposés verticalement. Le nombre total de carrés sur le tapis vaut donc xy. Si chaque carré est d'aire 1, l'aire du tapis vaut donc xy.
Il y a x carrés sur chaque bord horizontal et y carrés sur chaque bord vertical. Pour ne pas compter deux fois chaque carré des coins il faut soustraire 4 à $2x + 2y$. Le nombre de carrés touchant le bord vaut ainsi $2x + 2y - 4$.
Le nombre de carrés intérieurs vaut $xy - (2x + 2y - 4) = xy - 2x - 2y + 4$. Pour que ce nombre soit égal à $2x + 2y - 4$, il faut que

$$xy = 4x + 4y - 8 \;\Leftrightarrow\; xy - 4y = 4x - 8 \Leftrightarrow y(x-4) = 4(x-2)$$

On peut donc aussi exprimer y en fonction de x :

$$y = \frac{4(x-2)}{x-4}$$

Nous cherchons les valeurs entières de x et y qui vérifient cette relation. Autrement dit, nous cherchons les points du graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{4(x-2)}{x-4}$ dont les coordonnées sont entières. Nous n'avons pas appris à résoudre ce problème, mais pouvons chercher en essayant. Une bonne idée à avoir est de choisir $x = 5$ de sorte que le dénominateur $x - 4$ soit égal à 1. Alors $y = 12$.
On peut donc choisir un tapis de 5 sur 12. On peut aussi choisir un tapis de 6 sur 8.

Exercice 10 (Optionnel)

Le segment $[IJ]$ est la diagonale du rectangle $AIMJ$. Il a donc la même longueur que l'autre diagonale $[AM]$. Comment faut-il placer M pour minimiser la longueur de $[AM]$? Il faut placer M sur la hauteur du triangle ΔABC issue de A !