

Cours Euler: Série 29

1^{er} mai 2024

Remarque : on fera à choix l'exercice 1 ou l'exercice 2.

Exercice 1

Quadrilatère dual. En joignant les milieux des côtés d'un quadrilatère convexe, on forme un nouveau quadrilatère. Quelles sont ses caractéristiques ? Traite les cas d'un parallélogramme quelconque, d'un rectangle et d'un losange. Justifie à chaque fois ta réponse.

Exercice 2

Une **bande** est une paire de droite parallèles. L'intersection de deux bandes (non parallèles et non confondues) forme les sommets d'un quadrilatère simple. A quelles conditions ce quadrilatère est-il du type ci-dessous. Pour chacun des cas justifie ta réponse utilisant une proposition vue au cours.

- | | |
|-------------------------|-------------------|
| 1) un parallélogramme ? | 3) un rectangle ? |
| 2) un losange ? | 4) un carré ? |

Exercice 3

Réponds aux questions suivantes. Justifie chaque réponse affirmative avec une proposition du cours, et chaque réponse négative par un contre-exemple.

- 1) Est-ce qu'un losange est un trapèze ?
- 2) Est-ce qu'un trapèze est un losange ?
- 3) Est-ce qu'un rectangle est un trapèze ?
- 4) Est-ce qu'un rectangle est un losange ?
- 5) Est-ce qu'un losange est un parallélogramme ?
- 6) Est-ce qu'un parallélogramme est un rhomboïde ?

Exercice 4

Énonce les propriétés des angles, des diagonales et des côtés d'un carré. En te basant sur ces propriétés, dis si le carré est un (justifie) :

- | | |
|--------------------|--------------|
| 1) quadrilatère | 4) rhomboïde |
| 2) trapèze | 5) losange |
| 3) parallélogramme | 6) rectangle |

Exercice 5

- 1) Montre que deux angles d'un trapèze ayant pour sommets les deux extrémités d'un côté latéral (l'un des côtés qui n'est pas une base) sont supplémentaires.
- 2) En utilisant un résultat du cours concernant les rectangles, montrer que dans un triangle rectangle la médiane issue du sommet de l'angle droit mesure la moitié de l'hypoténuse.
- 3) En utilisant le même résultat sur les rectangles ainsi qu'un résultat du cours sur les triangles isocèles, montre que le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle se trouve au milieu de l'hypoténuse.

Exercice 6

Un peu plus de théorie : Les losanges. Montre les propriétés des losanges de la Proposition 5.4.

Indication. Fais un dessin pour t'aider à raisonner. On appellera les sommets A, B, C et D et les diagonales sont AC et BD . Pour montrer que deux figures (segments ou angles) sont isométriques, trouve une isométrie qui transforme l'une des figures en l'autre !

Exercice 7

Construis les quadrilatères suivants :

- 1) Un parallélogramme $EFGH$ sachant que $EF = 8$ cm, $EG = 10$ cm et $EH = 7$ cm.
- 2) Un losange $ABCD$ sachant que $AB = 4$ cm et $AC = 10$ cm.
- 3) Un rhomboïde $TUVW$ sachant que $TU = 8$ cm, $\widehat{WTU} = 60^\circ$ cm et $\widehat{TUV} = 45^\circ$.

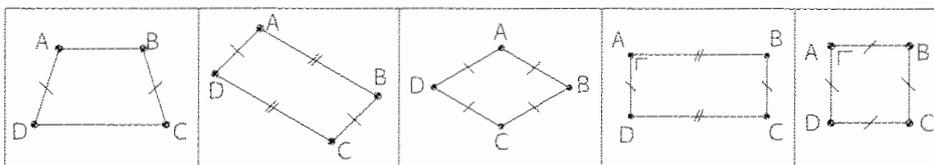
Exercice 8

- 1) Dessine un quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux isométriques, mais qui n'est pas un parallélogramme.
- 2) Dessine un tel quadrilatère qui admet de plus un centre de symétrie, et indique-le. Est-il simple ?

Exercice 9

Pour le point a) traiter aussi le cas d'un trapèze non-simple.

12 Observe ces quadrilatères.



a) Lesquels sont leur propre image par une rotation d'amplitude différente de 360° ?

.....

b) Détermine le centre de cette rotation.

c) Quelle est l'amplitude de cette rotation ?

.....

Exercice 10

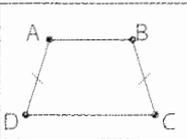
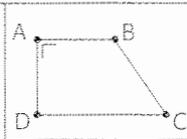
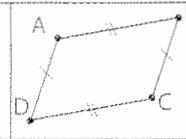
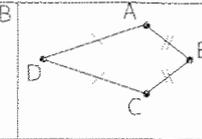
Soient A, B deux points distincts et C un point aligné avec A et B . On suppose que P vérifie $\overline{PA} = \overline{CA}$ et $\overline{PB} = \overline{CB}$. Démontre qu'alors $P = C$. Il s'agit du Lemme 1.2 du Chapitre 4. Cite explicitement l'axiome de distance que tu utilises au moment où tu en as besoin.

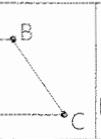
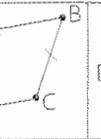
Exercice 11

Pour le point a) traiter aussi les cas d'un fer de lance et d'un trapèze non-simple.

 Observe les figures suivantes.

a) Nomme-les. Dessine leurs éventuels centres et axes de symétrie.

Figures				
Nom (précis)				
Quels points sont des centres de symétrie ?				
Quelles droites sont des axes de symétrie ?				

Figures			
Nom (précis)			
Quels points sont des centres de symétrie ?			
Quelles droites sont des axes de symétrie ?			

b) L'observation des tableaux précédents te permet de dire : **pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme**, il doit admettre un élément de symétrie. Lequel ?

.....

c) De même, **pour qu'un quadrilatère soit un rectangle**, il doit admettre des éléments de symétrie. Lesquels ?

.....

d) Et un **losange** ?

.....

e) Et un **carré** ?

.....

Exercice 12

Construis les figures géométriques suivantes en indiquant dans chaque cas la marche à suivre. Tu peux esquisser un schéma pour t'aider à trouver une solution.

- 1) Un triangle isocèle dont la base mesure 3,5 cm et la hauteur correspondante mesure 6 cm.
- 2) Un triangle équilatéral dont une hauteur mesure 6,7 cm.
- 3) Un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 7,5 cm et l'un des cathètes mesure 3,9 cm.
- 4) Un trapèze dont les côtés mesurent 10, 3, 5 et 4 cm (dans cet ordre!).

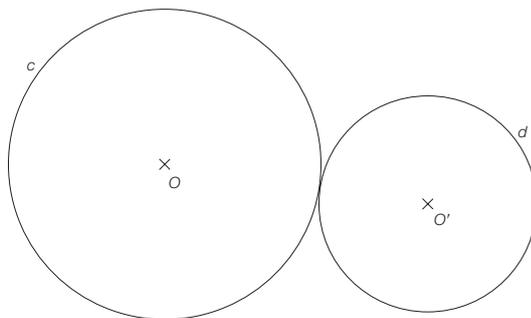
Exercice 13

Construis trois cercles sur la donnée.



86.

Dessine un cercle tangent aux deux cercles tangents donnés c et d et dont le rayon mesure 2 cm. Y en a-t-il d'autres?



Optionnel. Essaie de décrire tous les cercles tangents possibles (Utilise la proposition du cours sur les cercles tangents, difficile). Raisonnement sur feuille annexe.

Exercice 14 (Optionnel)**Pause mathématique : Un problème du mois des Olympiades de maths.**

(a) Le nombre 15 s'écrit comme somme de trois nombres consécutifs : $15 = 4 + 5 + 6$. Quels sont les nombres que l'on peut obtenir comme sommes de trois nombres consécutifs ?

(b) Le nombre 15 s'écrit comme somme de deux, trois et cinq nombres consécutifs : $15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$. De combien de manières peut-on écrire 2015 comme somme de nombres consécutifs. Peux-tu écrire une formule pour un nombre n arbitraire ?