Cours Euler: Corrigé 30

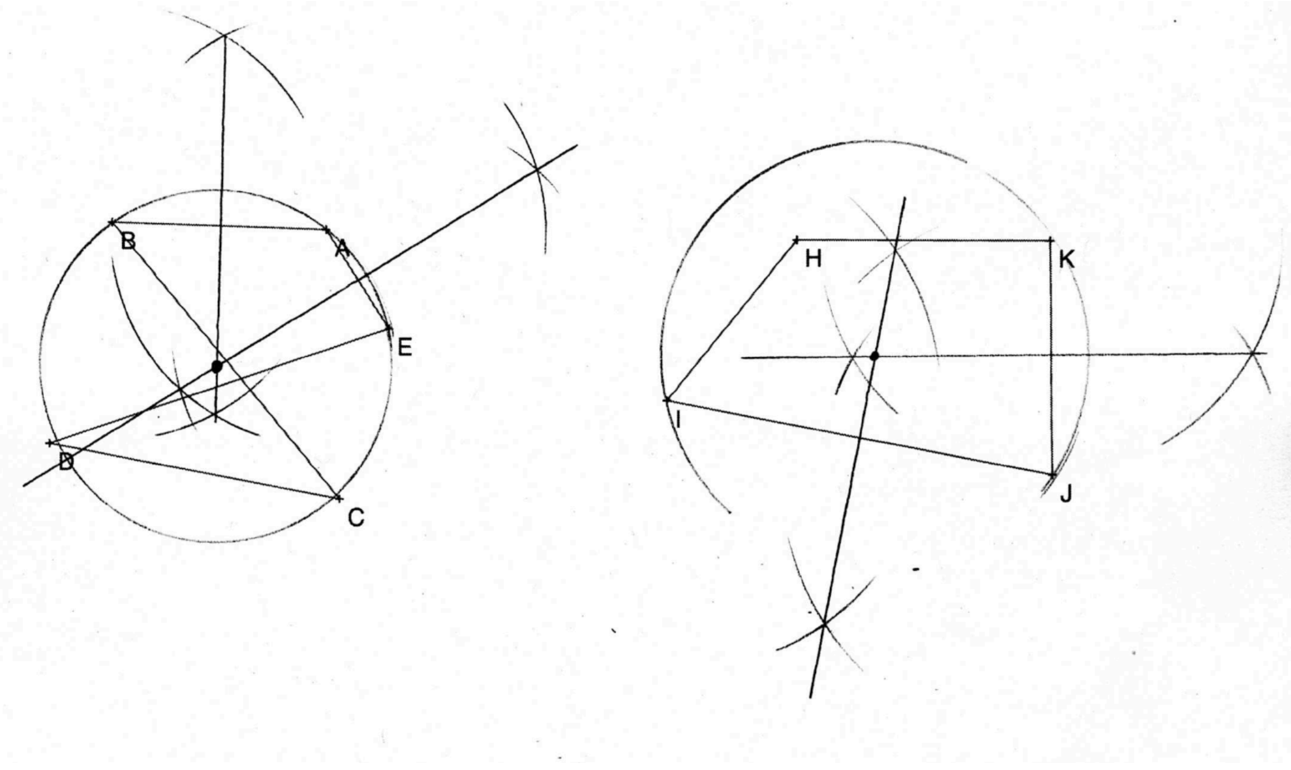
30 avril 2025

Exercice 1

a) médianes : PC et TA
b) bissectrice : AS
c) segment moyen : $[PT]$
d) orthocentre : X
e) médiatrice : TU
f) hauteurs : QC et AR
g) centre de gravité : V

Exercice 2

Pour cet exercice, nous utilisons un théorème vu au cours : étant donné un triangle, il existe un unique cercle circonscrit. Ceci nous donne une méthode pour déterminer par construction si un polygone est inscriptible. Car s'il existe un cercle circonscrit, il doit forcément être le cercle circonscrit de tout triangle déterminé par un triple de sommets du polygone. Il suffit de choisir trois sommets du polygone et de construire le cercle circonscrit au triangle déterminé par ces trois sommets. Si ce cercle est circonscrit au polygone le polygone est clairement inscriptible. Si des sommets ne touchent pas le cercle alors le polygone ne peut pas être inscrit dans aucun cercle.
L'image suivante montre que le seul polygone inscriptible est le premier :



Exercice 3

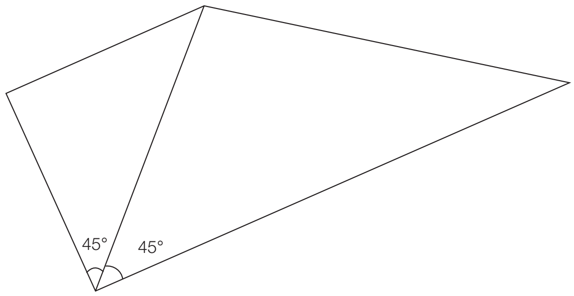
Vrai ou Faux ?

Corrigé

50.

Par exemple :

a) C'est vrai pour tous les cerfs-volants, les losanges, les carrés et les fers de lance. Mais il existe d'autres possibilités.



b) impossible, car deux droites sécantes forment toujours deux angles supplémentaires qui sont, tous les deux, inférieurs à 180°.

c) un carré

d) Faux. Une droite tangente en un point T d'un cercle est toujours perpendiculaire au rayon OT.

e) Vrai. La médiatrice de la base du triangle isocèle est aussi la bissectrice du sommet opposé. Ainsi le point d'intersection avec une autre bissectrice sera le centre du cercle inscrit.

Exercice 4

Corrigé

47.

Pour construire le centre O du cercle donné c, il s'agit de construire l'intersection des médiatrices m et n de deux cordes de ce cecle, par exemple BX et XY.

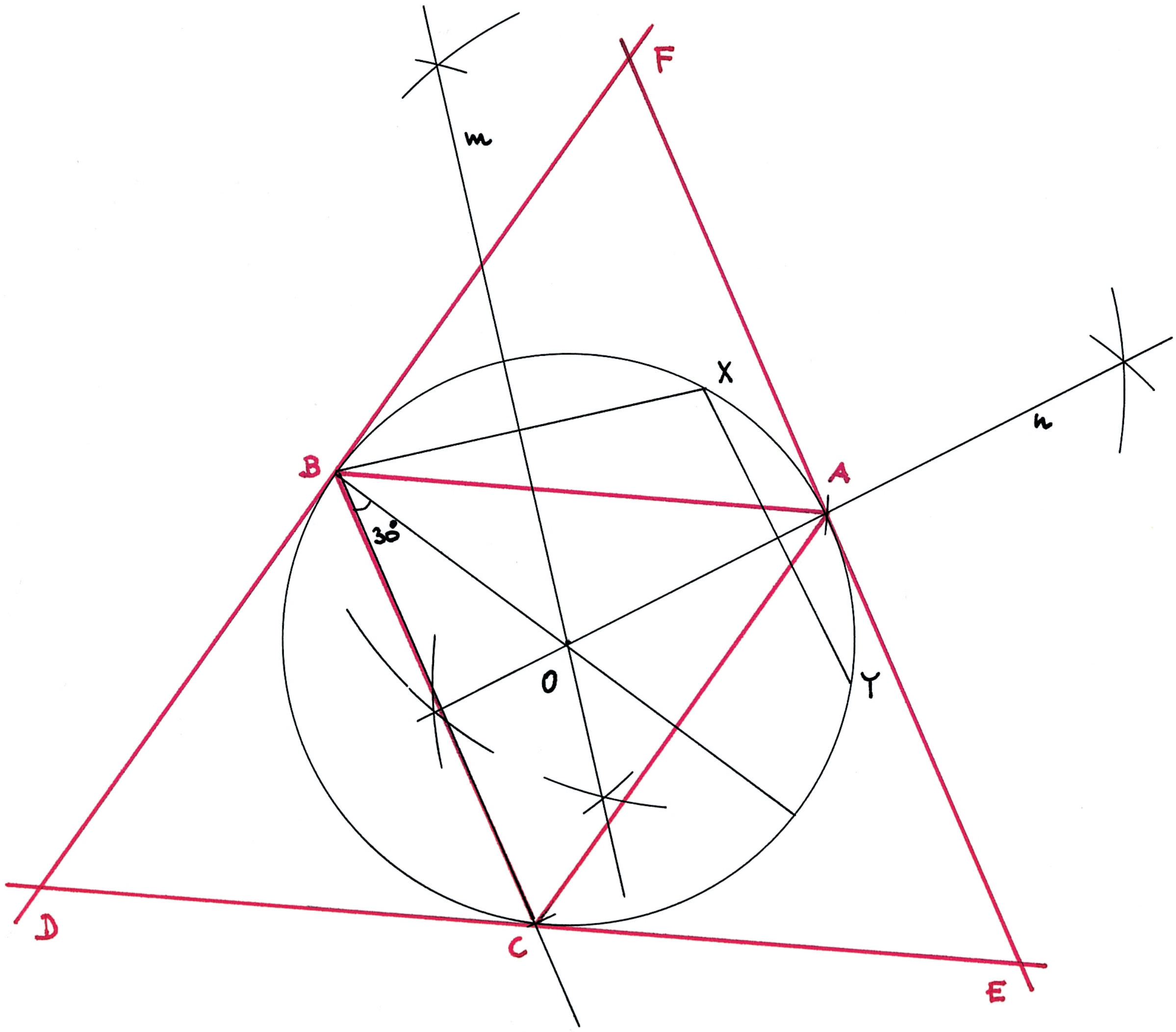
Pour construire un triangle équilatéral ABC, inscrit dans le cercle c, on procède de la manière suivante :

- construire un angle de 30°, dont l'un des côtés est BO ;
- le second côté coupe le cercle c en C ;
- construire un angle $\widehat{CBA}$ de 60°, A étant situé sur le cercle c.

Pour construire un triangle EFD équilatéral de telle manière que c soit son cercle inscrit, on trace, par exemple :

- une parallèle à AC par B ;
- une parallèles à AB par C ;
- une parallèle à BC par A.

Ces trois droites forment le triangle EFD cherché.



Exercice 5

Expressions algébriques d'angles.
ES41
La somme des angles d'un triangle vaut 180°. Nous utiliserons ce résultat dans chaque partie et ne le mentionnerons donc plus ! Il faut dans chaque cas résoudre une équation affine élémentaire.

a) L'un des angles cherchés vaut $90° - \alpha$ (somme des angles), l'autre vaut $180° - \alpha$ (supplémentaire).

b) L'angle cherché vaut $180° - 2\alpha$.

c) Comme en a) l'angle en O vaut $90° - \alpha$, si bien que son angle adjacent supplémentaire vaut $90° + \alpha$. L'angle en M étant droit, comme celui en L, on conclut par la réciproque du Théorème de la transversale que les droites MN et LO sont parallèles. Ainsi l'angle en N vaut $90° - \alpha$ par le Théorème de la transversale.

d) Il s'agit d'un parallélogramme. Ainsi, les angles opposés sont isométriques et $\widehat{ILK} = \alpha$. De plus, $\widehat{JIL} = \widehat{JKL}$ et, étant donné que la somme des angles d'un quadrilatère vaut 360°, $\widehat{JIL} + \widehat{JKL} = 360° - 2\alpha$, et donc $\widehat{JIL} = \widehat{JKL} = 180° - \alpha$. Ainsi, l'angle cherché en K, qui est supplémentaire à $\widehat{JKL}$, vaut α.

ES94

a) L'angle cherché vaut 127°.

b) L'angle opposé vaut aussi 70° car il s'agit d'un parallélogramme. La somme des deux autres angles vaut donc 220° et chacun d'eux vaut 110°.

c) Les bissectrices de ce triangle partagent chaque angle en deux angles isométriques. En F on a donc un autre angle de 30°. En G l'angle vaut $180° - 60° - 80° = 40°$. Chaque angle indiqué vaut par conséquent 20°. Pour calculer les angles au centre il suffit de considérer les triangles formés par deux des sommets E, F, G et le centre du cercle inscrit. On trouve alors 120°, 130° et 110°. La somme de ces trois angles vaut effectivement 360°, c'est-à-dire un tour complet.

d) 92°.

e) Le pentagone régulier est inscrit dans un cercle. Chaque triangle est isocèle. L'angle au centre vaut un cinquième de 360°, c'est-à-dire 72°. Les deux autres angles étant isométriques ils valent tous deux 54°.

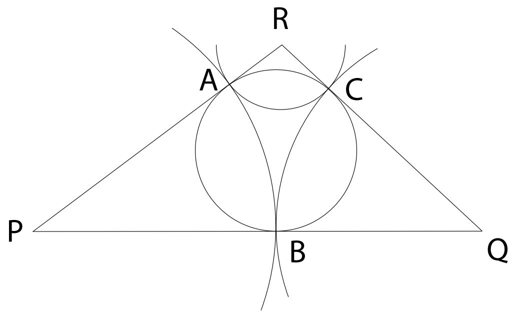
f) Le trapèze isocèle a un axe de symétrie. Il y a un angle en L qui vaut 32° et cela nous donne un angle en P qui vaut 118°. De même l'angle opposé vaut 118°. Les deux angles en P que nous ne connaissons pas encore valent ainsi chacun 62°. D'autre part les deux angles en I et J dans le triangle PIJ valent 32° par le Théorème de la transversale.

   En observant maintenant le triangle IPL on trouve l'angle en L de 38° et par conséquent l'angle manquant en K, aussi de 38°. Il est enfin facile de trouver les angles en J de 80°.

Exercice 6 (Optionnel)

Pour minimiser les longueurs des portes, il faut que le portes se touchent deux à deux en un seul point. Appelons PQR le triangle, A l'intersection des portes du côté PR, B l'intersection de celles du côté PQ et C celle des portes de QR.
Comme la porte attachée à P bouge de PR à PQ, les segments $[PA]$ et $[PB]$ ont la même longueur. De même $\overline{QB} = \overline{QC}$ et $\overline{RA} = \overline{RC}$. Le problème revient donc à trouver trois points A, B et C, un sur chacun des côtés, tels que $\overline{PA} = \overline{PB}$, $\overline{QB} = \overline{QC}$ et $\overline{RA} = \overline{RC}$. Nous démontrons que l'unique

solution à ce problème est quand A, B et C sont les points d'intersection du triangle avec son cercle inscrit c.



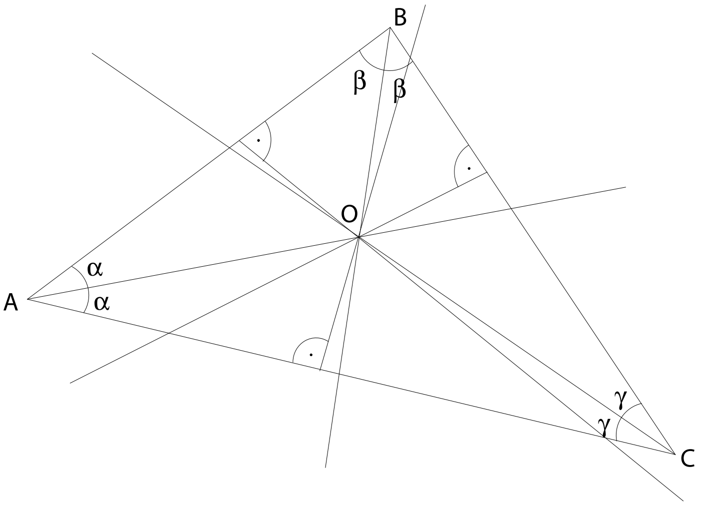
Montrons tout d'abord que les points d'intersections A, B et C de c avec le triangle forment effectivement une solution. Soit O le centre de c. Les segments $[OA]$ et $[OB]$ sont égaux en étant des rayons de c. Les angles $\widehat{OAP}$ et $\widehat{OBP}$ sont droits (donc égaux) car AP et BP sont tangents à c. En plus le côté PO est commun au triangles APO et BPO. Par les propriétés des triangles, APO et BPO sont isométriques, car ils ont deux côtés et un angle de même mesure. En particulier $\overline{AP} = \overline{BP}$. De la même manière on montre que $\overline{QB} = \overline{QC}$ et $\overline{RA} = \overline{RC}$. Ces points A,B et C sont donc une solution du problème.
Il est difficile de montrer géométriquement que cette solution est unique. Nous donnons une démonstration algébrique, en utilisant les propriétés des systèmes d'équations linéaires. Appelons a, b et c les longueurs des portes PA, QB et RC respectivement. La somme des longueurs de deux portes doit être égale à la longueur du côté du triangle ayant comme extrémités les sommets auxquels les portes sont attachées. Les trois longueurs doivent donc satisfaire les équations

$$\begin{aligned} a + b &= 10 \\ b + c &= 8 \\ c + a &= 4 \end{aligned}$$

Comme il y a une unique solution à ce système, cette solution consiste en les distances $\overline{PA}$, $\overline{QB}$ et $\overline{RC}$ quand A, B et C sont les intersections du triangle avec son cercle inscrit. De plus, ces longueurs sont $a = 3$m, $b = 7$m et $c = 1$m.

Exercice 7

Cercle inscrit et circonscrit. Pour que ces deux cercles soient concentriques, il faut que le point d'intersection des médiatrices coïncide avec le point d'intersection des bissectrices. C'est certainement le cas pour un triangle équilatéral (toutes les droites remarquables sont confondues). Cela peut-il arriver pour d'autres triangles ? Non.
Montrons en effet que si les centres sont les mêmes alors le triangle est équilatéral. La situation est représentée par le dessin suivant, où O est le centre du cercle inscrit et du cercle circonscrit.



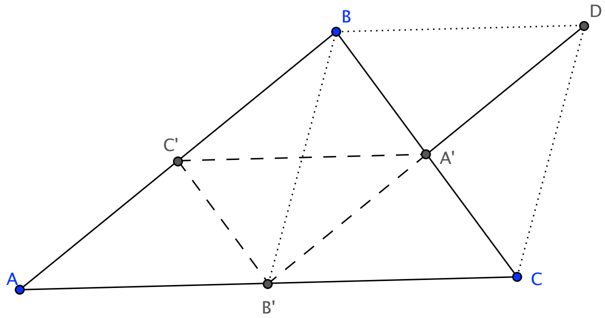
Comme O est le centre du cercle circonscrit, les segments $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$ sont des rayons de ce cercle. En particulier, ils ont même longueur. Donc les triangles AOB, AOC et BOC sont isocèles en O. Ceci implique que $\alpha = \beta = \gamma$. Comme OA, OB et OC sont les bissectrices des angles, nous avons

$$\widehat{BAC} = 2\alpha = 2\beta = \widehat{ABC} \text{ et } \widehat{ABC} = 2\beta = 2\gamma = \widehat{ACB}.$$

Nous avons montré que les angles du triangle ABC sont égaux, donc que le triangle est équilatéral.

Exercice 8

Segments moyens. 1) et 2)



3) Les points A', C, D sont du même côté de la droite BB' car B et C se trouvent de part et d'autre de A' et D et B' se trouvent de part et d'autre de A'. Par contre A se trouve de l'autre côté de BB'. En effet $[AC]$ coupe cette droite en B'.

4) Les diagonales $[B'D]$ et $[BC]$ du quadrilatère $BB'CD$ se coupent en leur milieu par construction. Il s'agit donc d'un parallélogramme. Les droites BD et $B'C$ sont donc parallèles et les longueurs $\overline{BD}$ et $\overline{B'C}$ sont égales.

5) Le quadrilatère $ABDB'$ est simple car la droite BB' passe entre les sommets opposés A et D. De plus les côtés opposés $[AB']$ et $[BD]$ sont isométriques et parallèles. Le parallélisme découle de (d) et

$$\overline{BD} = \overline{B'C} = \overline{AB'}$$

La première égalité provient de (d) également et la seconde du fait que B' est le milieu de $[AC]$. Le quadrilatère $ABDB'$ possède donc deux côtés isométriques et parallèles. C'est un parallélogramme.

6) Par conséquent la droite $A'B' = DB'$ est parallèle à la droite AB (il s'agit de deux côtés d'un parallélogramme). La longueur de $[AB]$ est égale à celle de $[B'D]$ pour la même raison. Or, celle-ci vaut le double de celle de $[A'B']$ par construction de D. Nous concluons que le segment moyen $[A'B']$ est deux fois plus petit que le côté correspondant $[AB]$.

Exercice 9 (Optionnel)

Il y a deux types de déchirures. Celles où les angles du triangle qu'elles déterminent ont des angles aigus, et celles où l'un des angles est obtus (plus de 90°). Le centre du cercle circonscrit a de tels triangles se trouve à l'intérieur du triangle dans le premier cas, mais à l'extérieur dans le second.
Pour masquer la déchirure il faut donc choisir un patch circulaire centré au centre du cercle circonscrit dans le premier cas, mais ce disque sera inutilement grand dans le second cas. Il vaut mieux choisir un cercle centré au milieu du plus grand côté (opposé à l'angle obtus), dont le diamètre est ce côté. Dans le cas 6), le triangle est rectangle et les deux solutions fonctionnent : le centre du cercle circonscrit se trouve au milieu de l'hypoténuse !

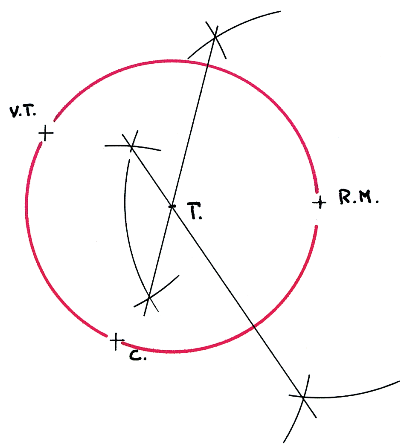
Exercice 10

Corrigé

42.

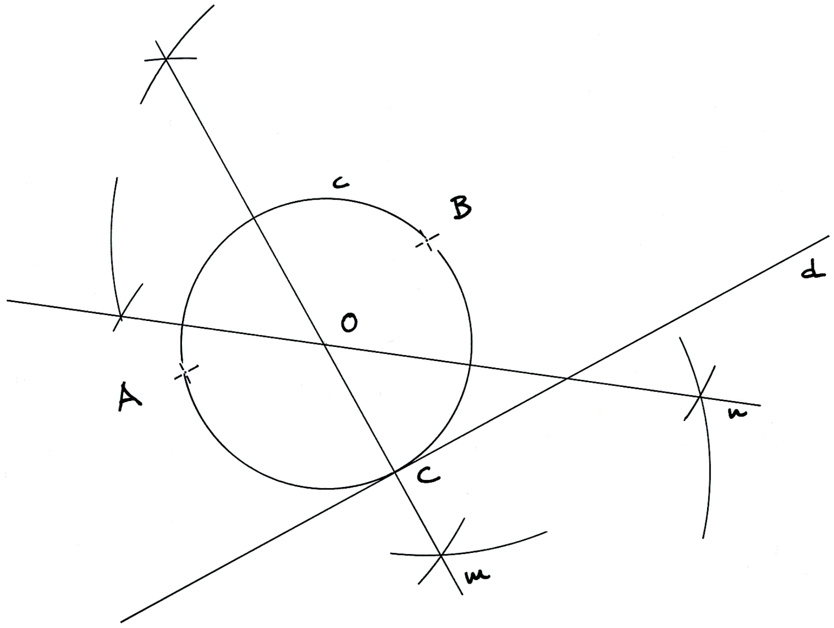
230 m = 0,23 km = 230'000 mm.

Le point cherché est donc le centre du cercle circonscrit au triangle formé par les trois lieux donnés. Il se trouve donc à l'intersection des trois médiatrices du triangle donné.



Exercice 11

Comme le cercle doit passer par A et B, il faut que son centre soit sur la médiatrice de AB.

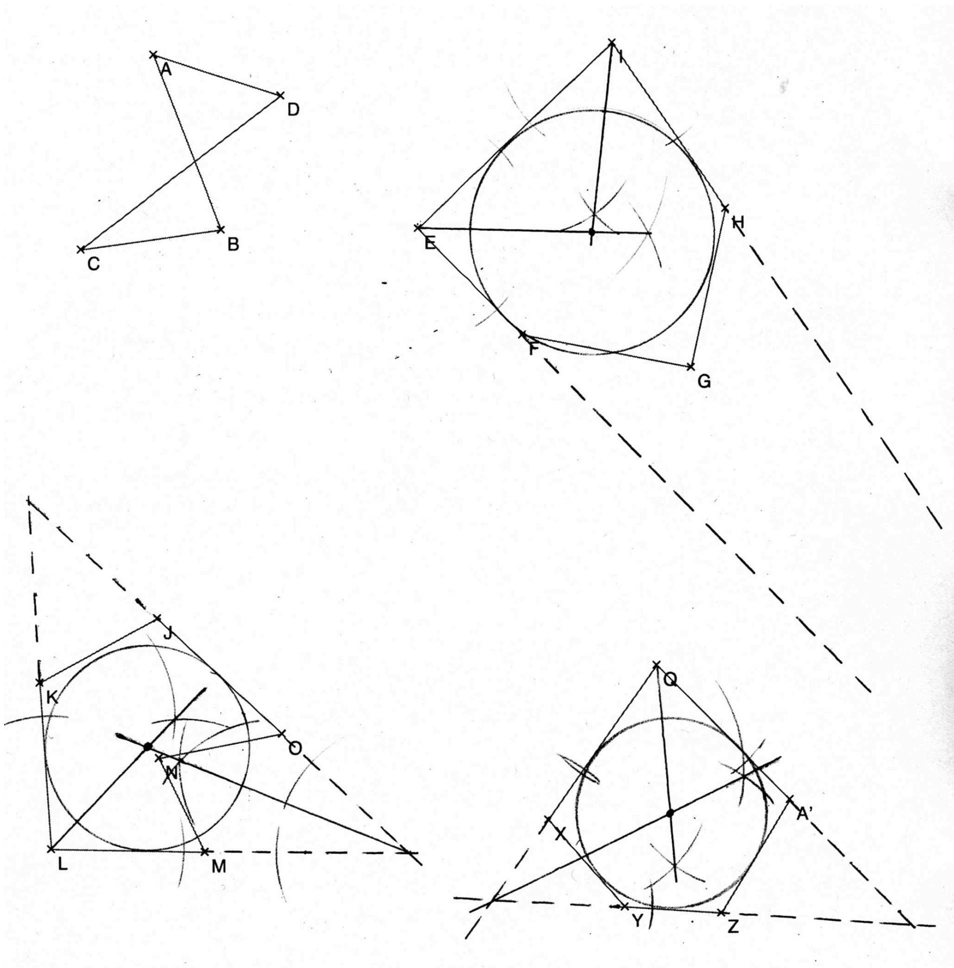


Comme AB est parallèle à d, la médiatrice de AB coupe d perpendiculairement. Le point d'intersection du cercle et de d sera donc l'intersection de d avec la médiatrice de AB. Ce centre est donc le centre du cercle circonscrit du triangle définit par ces trois points. Il reste donc à trouver l'intersection de la médiatrice de AB et de la médiatrice du segment reliant A (ou B) au point d'intersection avec d.

Exercice 12

Nous expliquons une technique pour vérifier par construction si des polygones sont circonscriptibles. Ceci ne marche pas pour tous les polygones. Par exemple, elle ne marche pas pour le premier. Nous traiterons ce cas à la fin.

Supposons qu'il soit possible de prolonger trois côtés d'un polygone de telle manière à obtenir un triangle (c.f. image ci-dessus). Alors un cercle inscrit dans le polygone doit forcément être un cercle inscrit de ce triangle. Or, par un théorème du cours, il existe un unique cercle inscrit dans ce triangle. Si ce cercle n'est pas tangent aux autres côtés du polygone, ce dernier n'est donc pas circonscriptible. L'image ci dessus montre que le seul polygone circonscriptible est le dernier (même si $EFGHI$ ne l'est pas « de peu »). Ici on voit la limite de cette méthode. Une petite imprécision dans la construction peut amener à une mauvaise conclusion.



Montrons que le premier polygone n'est pas circonscriptible. Prolongeons AD et CB pour obtenir « un espèce » de fer de lance (pas forcément symétrique). Notons E le nouveau sommet. Remarquons que nous ne pouvons pas le compléter en un triangle, car il faudrait ajouter un côté. Supposons qu'un cercle inscrit existe. Alors, il doit être tangent à AE et CE, et donc son centre doit se trouver sur la bissectrice de $\widehat{AEC}$. Comme il doit être tangent aussi à AE et AB, sont centre doit se trouver aussi sur la bissectrice de $\widehat{BAE}$. De plus, il doit être tangent à CE et CD, donc le centre doit se trouver sur la bissectrice de $\widehat{DCE}$. En particulier ces trois bissectrices devraient s'intersecter en un seul point. Comme cela n'est pas le cas, un tel cercle ne peut pas exister.