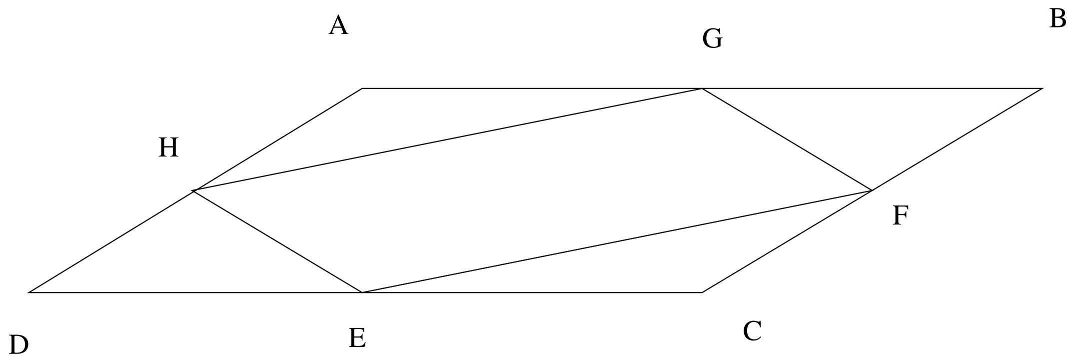
Cours Euler: Corrigé 29

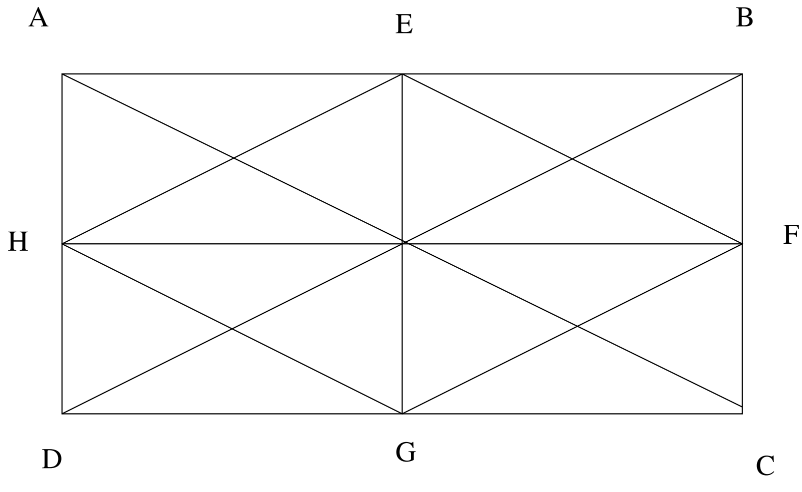
1er mai 2024

Exercice 1

Le cas du parallélogramme quelconque :
Dans ce cas, on obtient un nouveau parallélogramme.
En effet, considérons le parallélogramme $ABCD$ et nommons E, F, G et H le milieu de $[DC]$, $[CB]$, $[BA]$ et $[AD]$ respectivement. Remarquons que $EFGH$ est un quadrilatère simple par l'axiome du demi-plan. Soit O le centre de symétrie de $ABCD$. La symétrie S_O transforme G en E et F en H comme les symétries préservent les distances. Ainsi les côtés opposés de $EFGH$ sont isométriques deux à deux et $EFGH$ est un parallèlogramme par une proposition du cours.



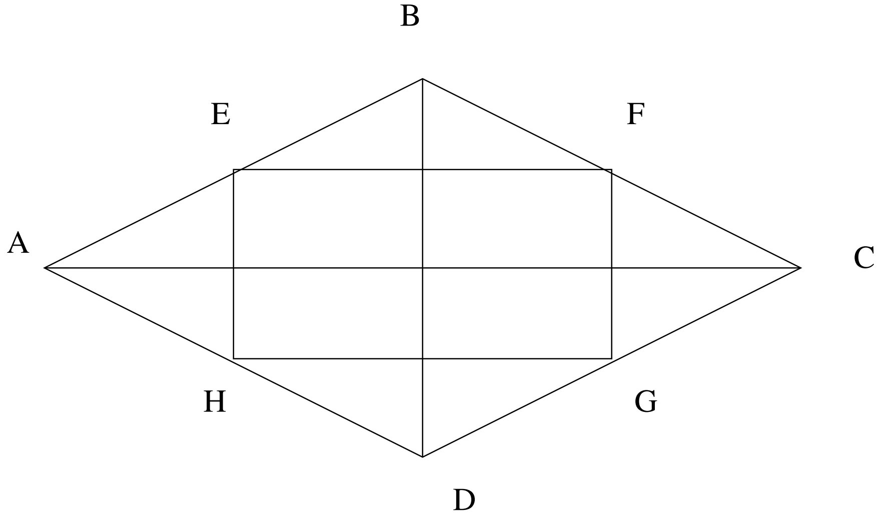
Le cas du rectangle :
Dans ce cas, le quadrilatère obtenu est un losange.
En effet, en joignant deux à deux les milieux des côtés du rectangle, on détermine deux segments ($[EG]$ et $[FH]$) perpendiculaires qui se coupent en leur milieu. Ainsi le quadrilatère $EFGH$ est symétrique par rapport à ses deux diagonales et $EFGH$ est donc un losange.



Le cas du losange :

Dans ce cas, on obtient un rectangle.

Montrons que ses segments diagonaux sont isométriques et se coupent en leur milieu. Comme le losange $ABCD$ est aussi un parallélogramme, alors on peut appliquer le résultat du premier cas pour obtenir que $EFGH$ est un parallélogramme. En particulier, ses segments diagonaux se coupent en leur milieu. La symétrie d'axe AC transforme le segment $[EG]$ en $[HF]$ car tout losange est symétrique par rapport à ses deux diagonales. Donc $EFGH$ est un rectangle.



Exercice 2

1) L'intersection de deux bandes non parallèles forme toujours un parallélogramme. En effet, par définition de la bande, n'importe quels deux côtés opposés du quadrilatère sont parallèles.

2) L'intersection de deux bandes non parallèles forme un losange lorsque la largeur des bandes (c'est-à-dire la distance entre deux droites parallèles) sont égales. En effet, dénotons $ABCD$ le quadrilatère simple formé par l'intersection des deux bandes. Rappelons qu'un quadrilatère simple est un losange si et seulement si les quatre côtés sont isométriques. Par la partie a) les côtés opposés sont isométriques. Donc $ABCD$ est un losange si et seulement si $\overline{AD} = \overline{DC}$. Soit P l'intersection de AB avec la perpendiculaire à AB passant par D. Soit Q l'intersection de BC avec la perpendiculaire à BC passant par D. Nous allons comparer les triangles ADP et CDQ. Notons que $\widehat{DPA} = 90° = \widehat{DQC}$ par construction et que $\widehat{DAP} = \widehat{DCQ}$ comme $ABCD$ est un parallèlogramme. Par conséquence $\widehat{PDA} = \widehat{QDC}$. Ainsi, les conditions suivantes sont équivalentes :
   - les triangles ADP et CDQ sont isométriques
   - $\overline{AD} = \overline{CD}$
   - $\overline{DP} = \overline{DQ}$ (c'est-à-dire les bandes ont la même largeur)

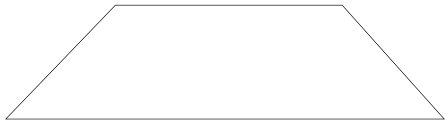
3) L'intersection de deux bandes non parallèles forme un rectangle lorsqu'ils se coupent à angle droit. En effet, l'intersection forme un parallèlogramme par la partie a) et ce parallèlogramme a un angle droit par hypothèse.

4) L'intersection de deux bandes non parallèles forme un carré lorsqu'ils se coupent à angle droit et lorsque leurs largeurs respectives sont identiques par les parties b) et c).

Exercice 3

1) Un losange est un trapèze, car deux de ses côtés opposés sont parallèles.

2) Un trapèze n'est pas toujours un losange, comme le montre l'exemple suivant :

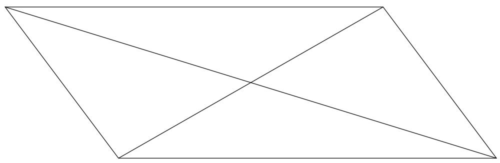


3) Un rectangle est un trapèze, car deux de ses côtés opposés sont parallèles.

4) Un rectangle n'est pas toujours un losange, car ses côtés ne sont pas toujours tous égaux.

5) Un losange est un parallélogramme, car ses côtés opposés sont parallèles.

6) Un parallélogramme n'est pas un rhomboïde, comme le montre la figure suivante :



Sur cette figure, on voit clairement que la parallélogramme n'est pas symétrique selon l'une de ses diagonales.

Exercice 4

Les diagonales d'un carré sont de longueur égales, se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires. Les angles d'un carré sont au nombre de 4 et sont tous droits. Les côtés d'un carré sont au nombre de 4 et sont tous isométriques, et chaque côté est perpendiculaire à ses côtés adjacents. Ainsi, chaque côté d'un carré est parallèle à son côté opposé.

1) Le carré est un quadrilatère, car il possède 4 côtés.

2) Le carré est un trapèze, car deux de ses côtés sont parallèles.

3) Le carré est un parallélogramme, car ses côtés opposés sont parallèles.

4) Le carré est un rhomboïde, car il possède deux paires de côtés isométriques.

5) Le carré est un losange car ses 4 côtés sont de longueur égales.

6) Le carré est un rectangle car ses 4 angles sont droits.

Exercice 5

1) Soit $ABCD$ un trapèze de bases AB et CD. Considérons les angles α et β de sommets A et D respectivement La droite AD est une transversale de la paire de parallèles AB et CD. Soit γ l'angle correspondant à α. Il est adjacent-supplémentaire à β de côté commun $[DC$. Comme $\alpha = \gamma$ par le théorème de la transversale, α est supplémentaire à β. Les angles restants sont également supplémentaires, en utilisant le même genre d'argument ou par le fait que la somme des angles d'un quadrilatère vaut 360 degrés.

2) Dessinons le symétrique de la figure par rapport au centre de d'hypoténuse : on obtient ainsi un rectangle. Comme les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu, alors la longueur de la médiane issue de l'angle droit est égale à la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

3) De même, dessinons le symétrique du triangle rectangle par rapport au centre de l'hypoténuse, qu'on note C : on obtient ainsi un rectangle. En utilisant le résultat précédent, on sait que la médiane d'un triangle rectangle issue du sommet qui correspond à l'angle droit partage le triangle en deux triangles isocèles de sommet C. De plus, comme les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu, alors C est à équidistance des quatre points du rectangle ; donc en particulier à équidistance des trois points du triangle rectangle considéré. Alors comme on sait que la distance du centre du cercle circonscrit aux trois points du triangles est la même, on en conclut que le centre du cercle circonscrit d'un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse.

Exercice 6

Soit $ABCD$ un losange.

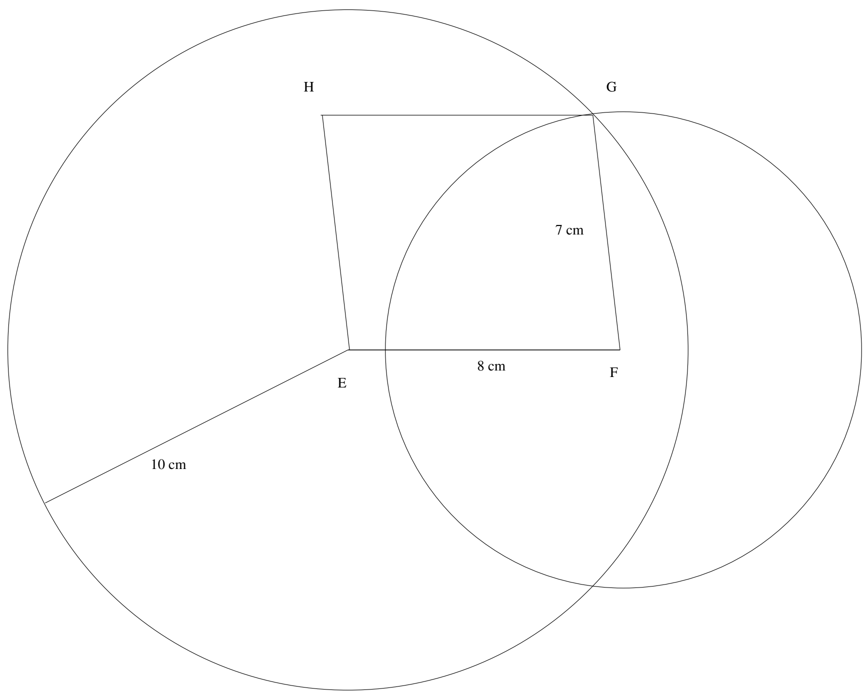
1) **Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires :** Considérons AC une diagonale. Comme B est le symétrique de D par rapport à AC, alors la droite BD est perpendiculaire à AC.

2) **Les angles opposés sont isométriques :** Comme l'angle $\widehat{ABC}$ est le symétrique de l'angle $\widehat{ADC}$ par rapport à AC, alors ces deux angles sont isométriques. De même les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCD}$ sont isométriques.

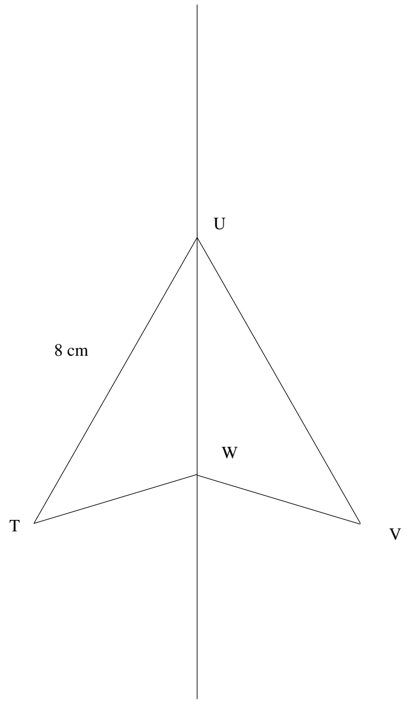
3) **Les quatre côtés sont isométriques :** Comme AB est le symétrique de BC par rapport à BD, alors AB et BC sont isométriques. De même AD et DC sont isométriques, BC et CD sont isométriques. Donc tous les côtés sont isométriques.

Exercice 7

1) Comme EH mesure $7cm$, alors $FG = 7cm$. On trace un segment $[EF]$ de longueur $8cm$, dont les extrémités sont E et F. On trace ensuite un cercle de centre F de rayon $7cm$, et un cercle de centre E de rayon $10cm$. Alors G est un point d'intersection de ces deux cercles. On trace la parallèle à EF passant par G, puis on place dessus le point H. Ainsi, on a les 4 sommets du quadrilatère $EFGH$.



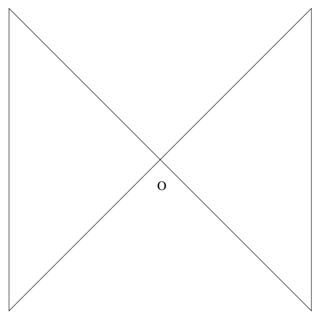
2) Un tel losange n'existe pas, car AC est une diagonale, et cette diagonale est 2 fois plus longue que le côté du losange (qui est de $4cm$).



3) On trace un segment $[TU]$ de $8cm$ de longueur, puis on trace un axe passant par U faisant un angle de $45°$ avec TU. On trace ensuite la bissectrice b de cet angle. On place sur cet axe le symétrique de T par rapport à b, qu'on nomme V.

   On trace un axe passant par T faisant un angle de $60°$ avec TU, tel que cet axe coupe le segment $[UV]$. On nomme W le point d'intersection de cet axe avec b.

Exercice 8



La figure précédente admet un centre de symétrie. Ce centre est le point O. Ce n'est pas un quadrilatère simple.

Exercice 9

Le parallélogramme, le losange, le rectangle sont leur propre image par une rotation de $180°$ de centre l'intersection des diagonales. Le carré est sa propre image par une rotation de $90°$ de centre l'intersection des diagonales. Ainsi, le carré est sa propre image par une rotation de $180°$ de même centre.

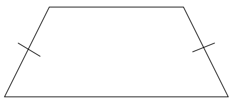
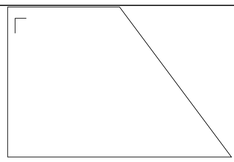
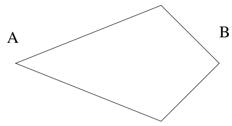
Exercice 10

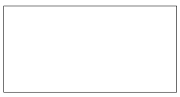
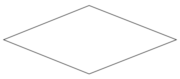
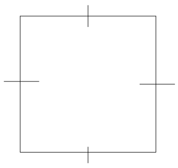
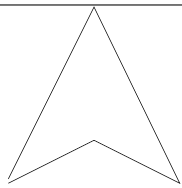
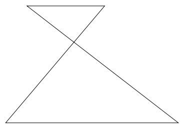
Rappelons que les points A et B sont supposés distincts. Soit P un point du plan qui vérifie $\overline{PA} = \overline{CA}$ et $\overline{PB} = \overline{CB}$. On distingue plusieurs cas.

— Si $C = A$, $\overline{PA} = \overline{CA} = 0$. Donc par l'axiome $(D2)$, $P = C$. De même, si $C = B$, $\overline{PB} = \overline{CB} = 0$. Donc par l'axiome $(D2)$, $P = C$.
— Si $C \in [AB]$ et C distinct de A et de B, alors $\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB} \overset{(D4)}{\Rightarrow} P \in [AB]$. Par l'axiome $(D5)$ appliqué à la demi-droite $[AB$, il existe un unique point à distance $\overline{CA}$ de A sur $[AB$. On en conclut que $P = C$.
— Si $B \in [AC]$ et C distinct de A et de B, alors $\overline{AP} = \overline{AC} = \overline{AB}+\overline{BC} = \overline{AB}+\overline{BP} \overset{(D4)}{\Rightarrow} B \in [AP]$. Alors par l'axiome $(D5)$ appliqué à la demi-droite $[AB$, il existe un unique point à distance $\overline{CA}$ de A sur $[AB$. On en conclut que $P = C$.
— Si $A \in [BC]$ et C distinct de A et de B, alors $\overline{BP} = \overline{BC} = \overline{BA}+\overline{AC} = \overline{BA}+\overline{AP} \overset{(D4)}{\Rightarrow} A \in [BP]$. Alors par l'axiome $(D5)$ appliqué à la demi-droite $[BA$, il existe un unique point à distance $\overline{CB}$ de B sur $[BA$. On en conclut que $P = C$.

Exercice 11

a)

Figures				
Nom	trapèze isocèle	trapèze rectangle	parallélogramme	cerf-volant
centres de symétrie	aucun	aucun	intersection des diagonales	aucun
axes de symétrie	médiatrice d'une des bases	aucun	aucun	axe AB

Figures					
Nom	rectangle	losange	carré	fer de lance	trapèze non simple
centres	intersection diagonales	intersection des diagonales	intersection des diagonales	aucun	aucun
axes	médiatrices des côtés	diagonales	diagonales et médiatrices des côtés	diagonale de l'angle $> 180°$	aucun

b) Pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme, l'intersection de ses diagonales doit être un centre de symétrie.

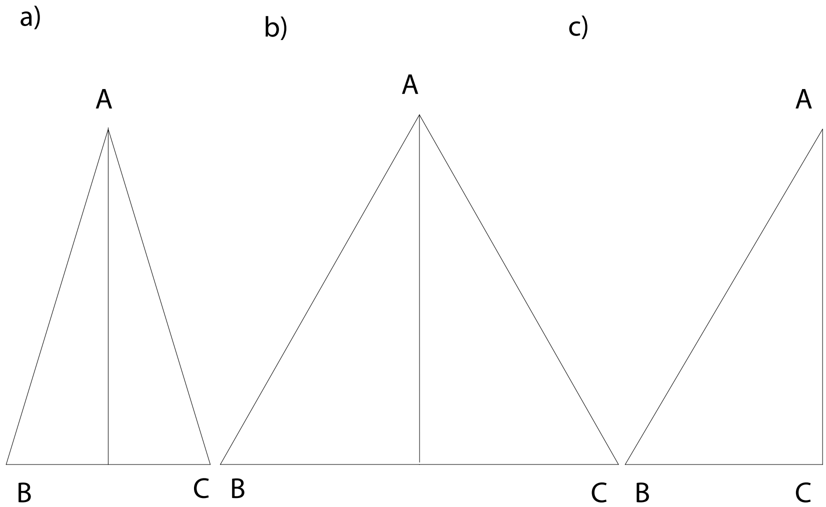
c) Pour qu'un quadrilatère soit un rectangle, il doit avoir comme axes de symétrie les médiatrices de ses côtés. On se rend compte qu'on n'a pas besoin de préciser que l'intersection des diagonales est un centre de symétrie : ce fait résulte du fait que les médiatrices de ses côtés sont tout les deux des axes de symétrie.

d) Le losange doit avoir ses diagonales comme axes de symétrie. Comme avant, on n'a pas besoin de préciser que l'intersection des diagonales est un centre de symétrie, c'est une conséquence du dernier fait.

e) Le carré doit avoir ses diagonales et les médiatrices de ses côtés comme axes de symétrie. Comme avant, on n'a pas besoin de préciser que l'intersection des diagonales est un centre de symétrie.

Exercice 12

Voici des dessins à l'échelle des triangles à construire :



Marches à suivre :

1) 1. Tracer un segment $[BC]$ de $3,5$ cm.
   2. Construire sa médiatrice m.
   3. Reporter la distance 6 cm d'un côté de m, pour obtenir le point A. Le triangle ABC est la solution cherchée.

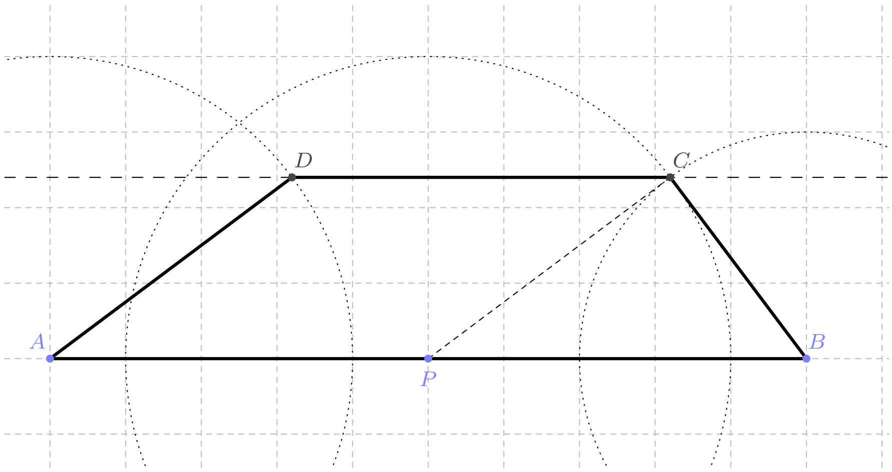
2) 1. Constuire un angle bAc de $60°$.
   2. Construire sa bissectrice d et reporter la distance de $6,7$ cm sur la demi-droite Ad qui est contenue dans l'angle bAc. Ceci détermine le point H.
   3. Construire la perpendiculaire p à AH passant par H. Elle coupe les demi-droites Ab et Ac en B et C respectivement. Le triangle ABC est la solution.

3) 1. Tracer un segment BC de $3,9$ cm.
   2. Constuire la perpendiculaire p à BC passant par C.
   3. Tracer le cercle c de centre B et de rayon $7,5$ cm. Il coupe p en deux points. Soit A l'un de ces points. Le triangle ABC est la solution.

4) On trace d'abord le côté $[AB]$ de 10 cm, puis on reporte sur ce segment un point P qui se situe à 5 cm de A.

   On trace maintenant deux cercles, l'un de centre B et de rayon 3 cm, l'autre de centre P et de rayon 4 cm. Un point d'intersection est C.

   Pour terminer on trace la parallèle à AB passant par C et on y construit le point D (par exemple sur le cercle de centre A et de rayon 4).



Exercice 13

Nous allons dans ce corrigé traiter la question plus générale suivante : étant donné deux cercles $c(O;r)$ et $c'(O';r')$ de rayons différents $0 < r < r'$ qui sont tangents dans un point T et satisfont $\overline{OO'} = r + r'$. Quel est le lieu géométrique des points du plan qui sont le centre d'un cercle tangent à c et c'. Nous allons démontrer que ce lieu géométrique est la réunion de la droite OO' sans les points O, O' et de tous les points P du plan tel que

$$|\overline{PO} - \overline{PO'}| = |r' - r|.$$

L'ensemble $\{P \in \pi | |\overline{PO} - \overline{PO'}| = |r' - r|\}$ est un exemple d'une *hyperbole*.

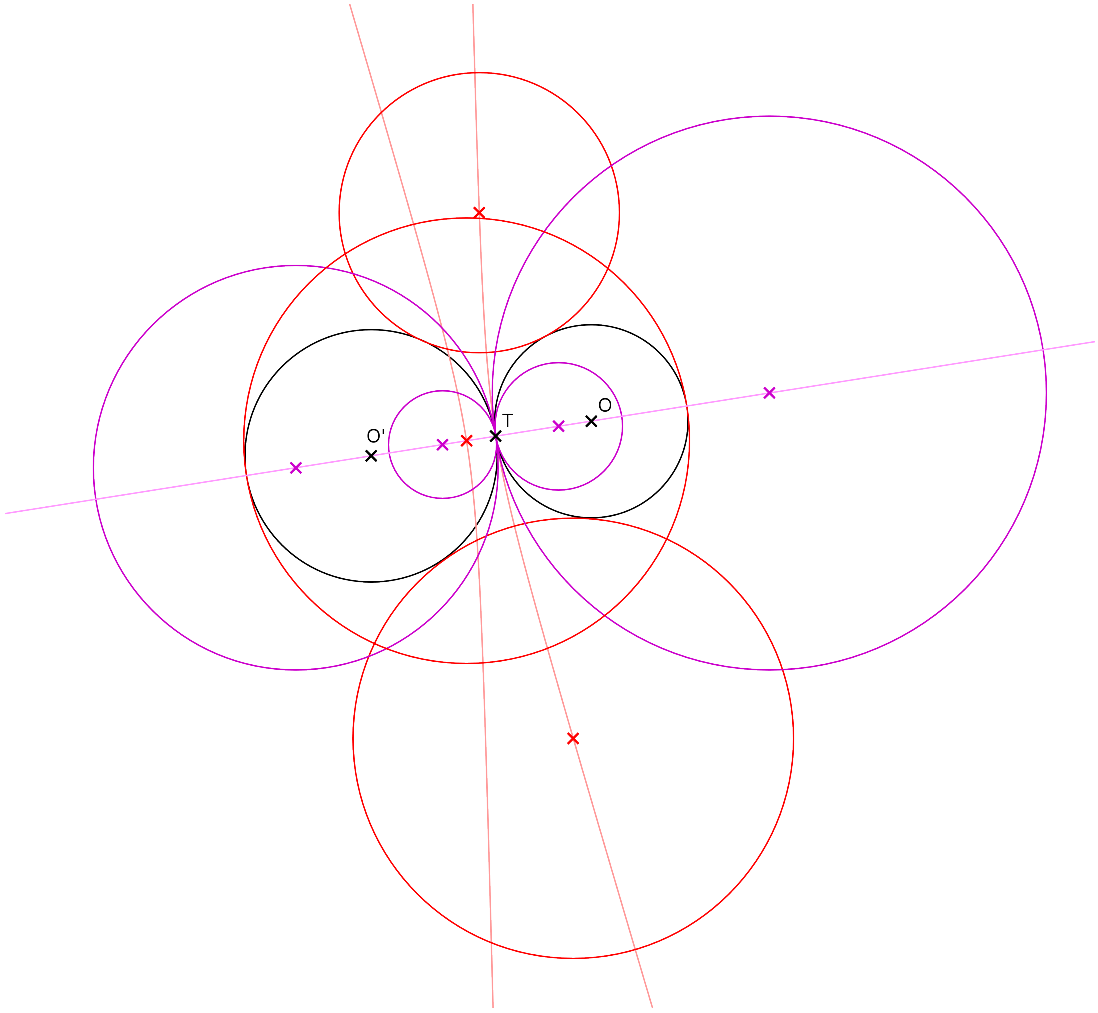
Pour commencer, nous allons montrer que tous les points vérifiant la condition du lieu se trouve sur la droite OO' sans O et O' ou sur cette hyperbole. Soit $c''(P;s)$ un cercle tangent à c et c'. En particulier, notons que $P \neq O$ et $P \neq O'$. Nous distinguons quatre cas.

— Si $\overline{OP} = r + s$ et $\overline{O'P} = r' + s$. Alors $\overline{O'P} - \overline{OP} = r' - r$ et P appartient donc à l'hyperbole.

— Si $\overline{OP} = |r - s|$ et $\overline{O'P} = r' + s$. Si $s \geq r$, alors $\overline{O'P} - \overline{OP} = r' + r = \overline{OO'}$ et donc $P \in OO'$ par (D.4). Si $s < r$, alors $\overline{OP} + \overline{O'P} = r + r' = \overline{OO'}$ et donc $P \in OO'$ par (D.4).

— Si $\overline{OP} = r + s$ et $\overline{O'P} = |r' - s|$. Si $s \geq r'$, alors $\overline{OP} - \overline{O'P} = r + r' = \overline{OO'}$ et donc $P \in OO'$ par (D.4). Si $s < r'$, alors $\overline{OP} + \overline{O'P} = r + r' = \overline{OO'}$ et donc $P \in OO'$ par (D.4).

— Si $\overline{OP} = |r - s|$ et $\overline{O'P} = |r' - s|$. Notons que $s \geq r'$ par l'inégalité triangulaire $\overline{OO'} \leq \overline{OP} + \overline{O'P}$. Alors $\overline{O'P} - \overline{OP} = r - r'$ et P appartient donc à l'hyperbole.



Réciproquement, montrons que chaque point P qui appartient à la droite OO' sans O et O' ou à l'hyperbole est le centre d'un cercle tangent à c et c'. Si $P \in OO' - \{O, O'\}$, on considère le cercle $c''(P; s)$ avec rayon s la distance entre P et le point T de tangence des cercles c et c'. En utilisant la partie (ii) de la proposition sur les cercles tangents on vérifie que c'' et c sont tangents et que c'' et c' sont tangents. Si P appartient à l'hyperbole, c'est-à-dire si $|\overline{PO} - \overline{PO'}| = r' - r$, distinguons deux cas.

— Si $\overline{PO'} > \overline{PO}$. Notons que $\overline{PO} \geq r$ par l'inégalité triangulaire

$$r + r' = \overline{OO'} \leq \overline{PO} + \overline{P'O} = \overline{PO} + r' - r + \overline{PO}.$$

Alors le cercle $c''(P; s)$ avec $s = \overline{PO} - r = \overline{PO'} - r'$ est tangent à c et c' par la proposition sur les cercles tangents.

— Si $\overline{PO'} \leq \overline{PO}$. Alors le cercle $c''(P; s)$ avec $s = \overline{PO} + r = \overline{PO'} + r'$ est tangent à c et c' par la proposition sur les cercles tangents.

Exercice 14 (Optionnel)

Pause mathématique : Le problème du mois des Olympiades de maths.

1) Un nombre s'écrit comme somme de trois nombres consécutifs s'il est de la forme $n + (n+1) + (n+2) = 3(n+1)$ pour un nombre entier n. Ces nombres sont donc précisément les multiples de 3.

2) Un nombre m s'écrit comme somme de k nombres entiers naturels s'il est de la forme $m = n + (n+1) + \cdots + (n+k-1)$. Distinguons deux cas. Si k est impair, $k = 2r+1$, on peut aussi

écrire

$$m = (a-r) + (a-r+1) + \cdots + a + (a+1) + \cdots + (a+r) = ka$$

On voit donc que m doit être un multiple de k. D'autre part, la formule ci-dessus montre que tout multiple de k est somme de k nombres entiers consécutifs.

Supposons maintenant que $k = 2r$ est pair. Le truc ci-dessus ne fonctionne pas à cause du manque de symétrie. On peut seulement écrire

$$m = (a-r+1) + \cdots + a + (a+1) + \cdots + (a+r) = ka + r$$

Ainsi m s'écrit comme somme de $2r$ nombres consécutifs si et seulement si $m - r$ est un multiple de $2r$. Deux sous-cas se présentent.

(i) m est pair. Alors r doit être pair aussi et m doit être un multiple impair de r.

(ii) m est impair. Alors r doit être impair aussi et m doit être un multiple de r.

Il faut donc étudier les propriétés de divisibilité de m. Dans le cas de 2015 on décompose

$$2015 = 5 \cdot 403 = 5 \cdot 13 \cdot 31$$

On en conclut donc que 2015 s'écrit comme somme de 5, 13 et 31 nombres consécutifs. Quant au cas d'un nombre pair de nombres consécutifs, il faut comprendre quand $2015 - r$ est multiple de $2r$. Puisque 2015 est impair, il faut que r soit impair aussi. Dans ce cas, on voit que 2015 est somme de 2, 10, 26 et 62 nombres entiers consécutifs.

Si on se restreint au cas de sommes de nombres consécutifs et positifs, il faut faire attention à la taille de $1 + 2 + \cdots + k$, que nous connaissons grâce à la formule démontrée par récurrence. Les multiples de r doivent être plus grands !