

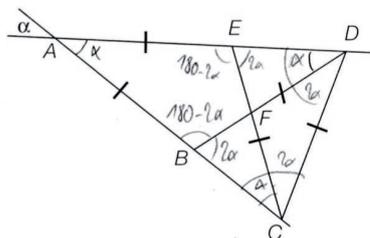
# Cours Euler: Corrigé 28

24 avril 2024

## Exercice 1

-  $\widehat{CAD} = \alpha$  (angles opposés par le sommet);

- les triangles  $ABD$ ,  $AEC$ ,  $ECD$  et  $BDC$  sont isocèles, avec des côtés isométriques qui mesurent une « allumette »;



-  $\widehat{ADB} = \widehat{ACE} = \alpha$  (les triangles  $ABD$  et  $AEC$  étant isocèles);

-  $\widehat{DBC} = \widehat{CED} = 2\alpha$  (ce sont les angles extérieurs aux triangles  $ABD$  et  $AEC$ );

-  $\widehat{EDC} = \widehat{BCD} = 2\alpha$  (les triangles  $ECD$  et  $BDC$  étant isocèles);

- comme  $\widehat{EDC} = \widehat{ADC}$  et  $\widehat{BCD} = \widehat{ACD}$ , on a dans le triangle  $ACD$   $\widehat{CAD} + \widehat{ADC} + \widehat{ACD} = 5\alpha = 180^\circ$ ;

- finalement, si  $5\alpha = 180^\circ$ , alors  $\alpha = 36^\circ$ .

## Exercice 2

$$1) \widehat{C} = 180 - \widehat{A} - \widehat{B} = 180 - 60 - 65 = 55^\circ$$

$$\widehat{D}_1 = 360 - \widehat{DEC} - \widehat{C} - \widehat{B} = 360 - 120 - 55 - 65 = 120^\circ$$

$$\widehat{E}_1 = 180 - 120 = 60^\circ$$

2)  $DAE$  est équilatéral, car tous ses angles mesurent  $60^\circ$ .

3) Non, les droites  $DE$  et  $BC$  ne sont pas parallèles. En effet, supposons qu'elles soient parallèles. Alors les angles  $\widehat{E}_1$  et  $\widehat{C}$  sont correspondants, donc par le théorème de la transversale, ils sont isométriques. Or, ce n'est pas possible, car l'un mesure  $55^\circ$  et l'autre  $60^\circ$ .

## Exercice 3

### Vrai ou Faux ?

1) Tout triangle équilatéral est isocèle. C'est vrai. Si les trois côtés du triangle sont isométriques, a fortiori deux côtés le sont.

2) Il existe un triangle rectangle qui est équilatéral. C'est faux. Les trois angles d'un triangle équilatéral sont isométriques (et valent donc  $60^\circ$ ). Il n'y a donc aucun angle droit.

3) Il existe un triangle rectangle qui est isocèle. C'est vrai. Les deux angles isométriques de ce triangle valent  $45^\circ$ .

- 4) Il existe un triangle isocèle dont deux angles valent  $1^\circ$ . C'est vrai. Le troisième angle vaut alors  $178^\circ$ . C'est un triangle très "plat", mais c'est un triangle.

#### Exercice 4

##### Equations.

- 1) D'un triangle rectangle on sait que qu'un angle aigu vaut le triple de l'autre angle aigu. Quelle est la mesure de chacun des trois angles de ce triangle ?

Soit  $x$  le plus petit angle aigu. L'autre angle aigu vaut donc  $3x$ . Comme la somme des angles d'un triangle vaut  $180^\circ$ , on a donc l'équation

$$x + 3x + 90 = 180$$

Par conséquent  $4x = 90$  et donc  $x = 22,5^\circ$ . Les trois angles du triangle valent  $90^\circ$ ,  $22,5^\circ$  et  $67,5^\circ$ .

- 2) On trace une hauteur d'un triangle équilatéral pour former deux triangles rectangles. Ils sont isométriques puisque la hauteur est aussi la médiane, si bien qu'ils ont leurs trois côtés isométriques deux à deux. Les angles valent alors  $90^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $30^\circ$ .
- 3) a)  $180 = 90 + 2x + x = 90 + 3x$  donc  $x = 30^\circ$ . De plus,  $\hat{A} = 90^\circ$ .  $\hat{B} = 60^\circ$  et  $\hat{C} = 30^\circ$ .  
 b)  $3x = 180$  car c'est un triangle équilatéral. Donc  $x = 60^\circ$ . De plus,  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$ .
- 4) c)  $\hat{A} = \hat{C}$  car le triangle est isocèle en  $B$ . Donc  $180 = 3x + 3x + 2x = 8x$  donc  $x = 22,5^\circ$ . De plus,  $\hat{A} = 67,5^\circ$ .  $\hat{B} = 45^\circ$  et  $\hat{C} = 67,5^\circ$ .  
 c)  $\widehat{ACB}$  et  $\widehat{BCD}$  sont supplémentaires, donc  $180 = x + 4x = 5x$  donc  $x = 36^\circ$ . De plus,  $\hat{A} = 72^\circ$ .  $\hat{B} = 72^\circ$  et  $\hat{C} = 36^\circ$ .  
 c) On a que  $\hat{A} = \hat{C}$  et  $\hat{B} = \hat{D}$ . De plus, la somme des angles d'un parallélogramme est  $360^\circ$ . Donc  $360 = 2x + x + 2x + x = 6x$  donc  $x = 60^\circ$ . De plus,  $\hat{A} = 120^\circ$ .  $\hat{B} = 60^\circ$  et  $\hat{C} = 120^\circ$ .

#### Exercice 5

Pour l'instant nous n'avons pas les moyens de faire de nombreuses observations. Voilà une conclusion que l'on peut tirer. La droite  $AN$  est la médiatrice de  $[BC]$ . Donc puisque la médiatrice de  $[BC]$  passe par  $A$ , alors  $AN$  est aussi la bissectrice de  $\hat{A}$ . Donc  $ABC$  est isocèle en  $A$  (par la proposition du cours sur les triangles isocèles). Nous en concluons que les angles en  $A$  et en  $C$  sont isométriques et que  $\overline{AB} = \overline{AC}$  par exemple.

Nous verrons plus tard que  $[MN]$  est parallèle à  $[AC]$  et la longueur de ce segment vaut la moitié de  $\overline{AC}$ . Le triangle  $\triangle BMN$  est isocèle en  $M$ ... Nous devons encore étudier les similitudes pour pouvoir comprendre cela.

#### Exercice 6

Soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $A$  tel que l'angle en  $A$  mesure  $36^\circ$ . Nous savons alors que les deux autres angles, en  $B$  et en  $C$  sont isométriques et valent tous deux  $72^\circ$ . Ainsi la bissectrice issue de  $B$  partage cet angle en deux angles de  $36^\circ$ .

Appelons  $D$  le pied de la bissectrice sur le segment  $[AC]$ . Ce point détermine deux triangles  $\triangle ABD$  et  $\triangle BCD$ . Tous deux sont isocèles. En effet le premier a deux angles égaux à  $36^\circ$ , celui en  $A$  et celui en  $B$ , le second a deux angles égaux à  $72^\circ$ , celui en  $C$  et celui en  $D$ .

**Exercice 7**

**Cas d'isométrie des triangles isocèles.** Dans cet exercice nous utilisons sans faire référence la proposition qui liste des caractérisations équivalentes d'un triangle isocèle.

Soient  $ABC$  et  $A'B'C'$  deux triangles isocèles respectivement en  $A$  et  $A'$ . Nous allons montrer que  $\widehat{B} = \widehat{B}'$  et  $\widehat{C} = \widehat{C}'$ . Comme  $ABC$  est isocèle en  $A$ , on a  $\widehat{B} = \widehat{C}$  et donc  $\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$  car  $180^\circ$  est la somme des angles dans un triangle. Similairement,  $\widehat{B}' = \widehat{C}' = \frac{180^\circ - \widehat{A}'}{2}$ . En utilisant que  $\widehat{A} = \widehat{A}'$  par hypothèse, on déduit que

$$\widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{B}' = \widehat{C}'.$$

- 1) Si  $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ , alors  $ABC$  et  $A'B'C'$  ont un côté isométrique compris entre deux angles respectivement isométriques. Ainsi  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont isométriques par le premier cas d'isométrie des triangles.
- 2) Si les hauteurs  $h_A$  issue de  $A$  et  $h_{A'}$  issue de  $A'$  sont isométriques, dénotons  $M = h_A \cap BC$  et  $M' = h_{A'} \cap B'C'$ . Notons que  $\widehat{BAM} = \widehat{A}/2 = \widehat{A'}/2 = \widehat{B'A'M'}$  et que  $\widehat{BMA} = 90^\circ = \widehat{B'M'A'}$ . Ainsi les triangles  $BAM$  et  $B'A'M'$  sont isométriques par le premier cas d'isométrie des triangles. Donc,  $\overline{CA} = \overline{BA} = \overline{B'A'} = \overline{C'A'}$ . On conclut que  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont isométriques par le deuxième cas d'isométrie des triangles.

**Exercice 8**

Comme le triangle  $\triangle ABD$  est isocèle en  $A$ , on en déduit que les angles en  $B$  et en  $D$  sont isométriques. Leur somme vaut  $180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$  si bien que chacun vaut  $50^\circ$ .

Le triangle  $\triangle CBD$  aussi est isocèle, en  $C$ . Ainsi l'angle en  $D$  vaut  $48^\circ$ . Finalement l'angle en  $C$  vaut  $180^\circ - 2 \cdot 48^\circ = 84^\circ$ . Le quadrilatère  $ABCD$  n'est pas un parallélogramme, sinon les angles alternes-internes déterminés par deux droites parallèles devraient être égaux.

**Exercice 9**

- 1) Etant donné l'angle  $\widehat{A} = \widehat{Sb'c'}$  et la base  $[BC]$  d'un triangle  $ABC$ , nous devons construire le triangle  $ABC$ .

Marche à suivre :

- Construire la bisectrice  $d$  de l'angle  $\widehat{A}$
- Construire une perpendiculaire à  $d$  qui intersecte la demi-droite  $b'$  dans un point  $C'$  et la demi-droite  $c'$  dans un point  $B'$
- Reporter l'angle  $\widehat{C'B'S}$  sur la demi-droite  $[BC$
- Reporter l'angle  $\widehat{B'C'S}$  sur la demi-droite  $[CB$  tel que son deuxième côté intersecte le deuxième côté de l'angle reporté sur  $[BC$  dans un point. C'est le sommet  $A$  du triangle recherché.

*Justification.* Le triangle construit a base  $[BC]$ . Il reste à montrer que la mesure de l'angle en  $A$  du triangle construit égale la valeur donnée  $\widehat{A}$ . Or, la mesure de l'angle en  $A$  vaut

$$180^\circ - \widehat{CBA} - \widehat{BCA} = 180^\circ - \widehat{C'B'S} - \widehat{B'C'S} = \widehat{A}.$$

- 2) Marche à suivre :
  - Tracer un segment  $[AB]$  de longueur  $r$
  - Construire un point  $C$  à distance  $r$  de  $A$  et de  $B$ . Alors l'angle  $\widehat{ABC}$  est un angle de mesure  $60^\circ$ .

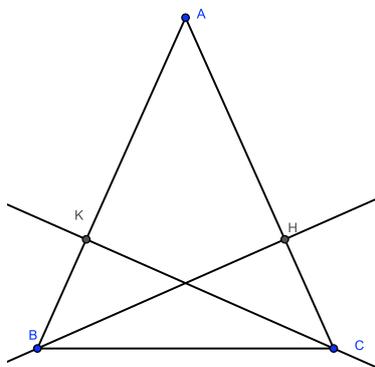
*Justification.* Les angles d'un triangle équilatéral sont chacun de mesure  $60^\circ$ , donc pour faire la construction demandée, on peut construire l'angle d'un triangle équilatéral quelconque.

### Exercice 10

Traçons un triangle  $ABC$  et supposons que les deux hauteurs isométriques sont celles issues de  $B$  et  $C$ . Notons  $H$  le pied de la hauteur issue de  $B$  et  $K$  celui issue de  $C$ . Les triangles  $BHA$  et  $CKA$  sont isométriques par le premier cas d'isométrie des triangles. En effet,

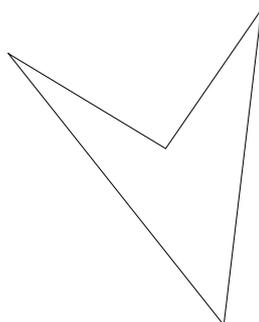
$$\begin{aligned}\widehat{BHA} &= 90^\circ = \widehat{CKA}, \\ \widehat{HBA} &= 90^\circ - \hat{A} = \widehat{KCA} \text{ et} \\ \overline{BH} &= \overline{CK}\end{aligned}$$

par hypothèse. Donc, le premier cas d'isométrie s'applique. En particulier  $\overline{BA} = \overline{CA}$ , ce qui était à démontrer.

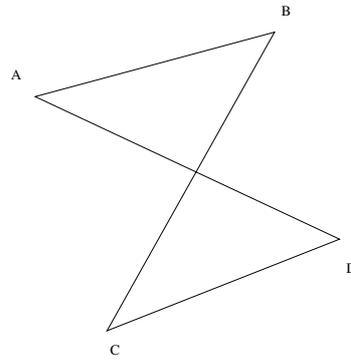


### Exercice 11

- 1) Oui, un carré est simple et convexe.
- 2) Oui, le quadrilatère suivant est simple et non convexe :



- 3) Non, tout quadrilatère non simple doit être non convexe, car tout polygone convexe est simple, par définition.
- 4) Oui. Puisque tout quadrilatère non simple est non convexe, il suffit de donner un quadrilatère non simple. Le quadrilatère  $ABCD$  suivant est non simple :

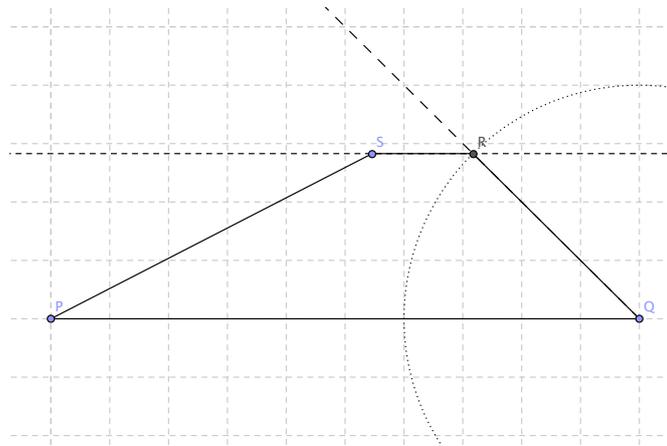


### Exercice 12

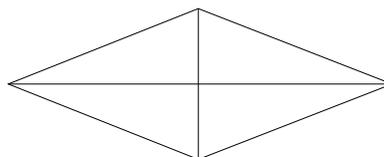
#### Les trapèzes.

1) Voici la marche à suivre :

- tracer le segment  $[PQ] = 10\text{cm}$  ;
- construire un angle de  $45^\circ$  en  $Q$  (angle droit puis bissectrice) ;
- reporter une distance  $4\text{cm}$  sur la droite obtenue, et placer le point  $R$ , puis tracer le segment  $[QR]$  ;
- construire la parallèle  $a$  à  $PQ$  passant par  $R$  ;
- le point  $S$  peut être n'importe où sur la droite  $a$ , hormis le point  $R$ .



2) Un trapèze admettant un axe de symétrie n'est pas forcément isocèle. En effet, un losange admet comme axe de symétrie une de ses diagonales, mais les médiatrices des côtés opposés ne sont pas forcément confondus.

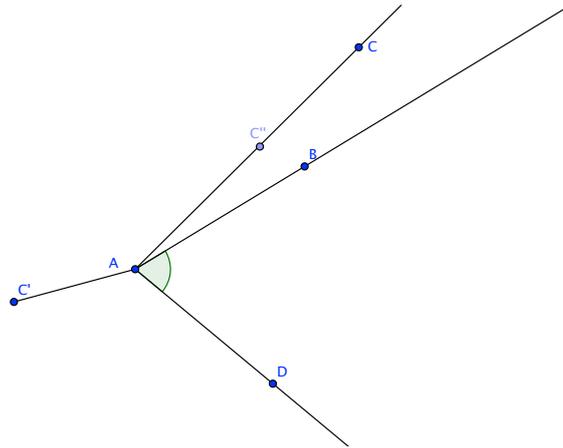


### Exercice 13

**Un peu de théorie : Les parallélogrammes.** Soit  $ABCD$  un quadrilatère simple. On suppose que les côtés opposés  $AB$  et  $CD$  sont parallèles et isométriques.

- 1) Supposons par l'absurde que le quadrilatère est simple, mais que les deux diagonales du quadrilatère se trouvent à l'extérieur des angles aux sommets dont elles sont issues.

La somme des angles d'un quadrilatère simple vaut  $360^\circ$ . Seul un angle peut donc mesurer plus de  $180^\circ$ . Lorsque nous considérons une diagonale, nous pouvons donc choisir un sommet en lequel l'angle est plus petit. Disons que pour la diagonale  $[AC]$  il s'agit de  $A$ . Par hypothèse la diagonale se trouve à l'extérieur de l'angle  $\widehat{DAB}$ . L'intérieur de l'angle est l'intersection de deux demi-plans déterminés par les droites  $AB$  et  $AD$  (c'est pour cela que nous nous sommes arrangés pour considérer un angle "petit").



Le sommet  $C$  ne se trouve pas à l'intérieur de cet angle. Il doit donc être de l'autre côté de l'une des droites  $AB$  (ou  $AD$ ) que le sommet  $D$  (ou  $B$ ). Pour fixer les idées et quitte à renommer les sommets, nous sommes dans l'une des situations indiquées sur la figure ci-dessus. Le point  $C$  se trouve de l'autre côté de  $AB$  que  $D$  (dans le cas de  $C'$ , il se trouve aussi de l'autre côté de  $AD$  que  $B$ ). Où peut se trouver  $C$ ? Il ne peut se trouver dans le cas de  $C''$  dans l'intérieur de l'angle opposé à  $\widehat{BAD}$ , car dans ce cas l'angle  $\widehat{BAD}$  est à l'extérieur du quadrilatère! Il se trouve donc dans la situation de  $C$  (ou  $C''$ ) sur une demi-droite issue de  $A$  à l'intérieur de l'angle adjacent-supplémentaire.

Il y a maintenant deux possibilités. Le point  $C$  se trouve de l'autre côté de la droite  $BD$  que  $A$ . C'est le cas du point  $C$  de la figure! Alors la deuxième diagonale  $[BD]$  se trouve à l'intérieur de l'angle  $\widehat{ADC}$ , ce qui contredit l'hypothèse. La deuxième possibilité est que  $C$  – comme c'est le cas du point  $C''$  sur l'illustration – se trouve du même côté de  $BD$  que  $A$ . Mais alors  $[DC]$  coupe  $[AB]$ . Le quadrilatère n'est pas simple.

Dans tous les cas on arrive à une contradiction. Ouf.

- 2) On suppose dès maintenant que la diagonale  $[AC]$  passe entre  $B$  et  $C$ . On prend le milieu  $O$  de cette diagonale et on considère l'isométrie  $S_O$ , symétrie centrale de centre  $O$ .

Alors  $S_O$  transforme  $A$  en  $C$ . Une symétrie centrale transforme une droite ne passant pas par le centre de symétrie en une droite parallèle si bien que  $S_O$  transforme  $AB$  en  $CD$ . Enfin, comme  $C$  se trouve à l'intérieur de l'angle  $\widehat{BAD}$ ,  $S_O(B)$  se trouve sur la droite  $CD$  du même côté de  $C$  que  $D$ . Ceci prouve que  $S_O$  transforme la demi-droite  $[AB$  en la demi-droite  $[CD$ .

- 3) De plus,  $S_O$  préserve les distances. Donc  $S_O(B)$  se trouve sur la demi-droite  $[CD$  à la même distance de  $C$  que  $B$  de  $A$ . Or, nous savons que les segments  $[AB]$  et  $[CD]$  sont isométriques (ils ont même longueur). Par conséquent  $S_O(B) = D$  et  $S_O$  transforme le segment  $[AB]$  en  $[CD]$ .

- 4) Pour conclure,  $S_O$  transforme  $B$  en  $D$  et donc  $D$  en  $B$ . En particulier  $S_O$  transforme la droite  $DA$  en  $BC$  : Ces droites ne passent pas par  $O$  et doivent donc être parallèles. Nous en déduisons que le quadrilatère  $ABCD$  est un parallélogramme.