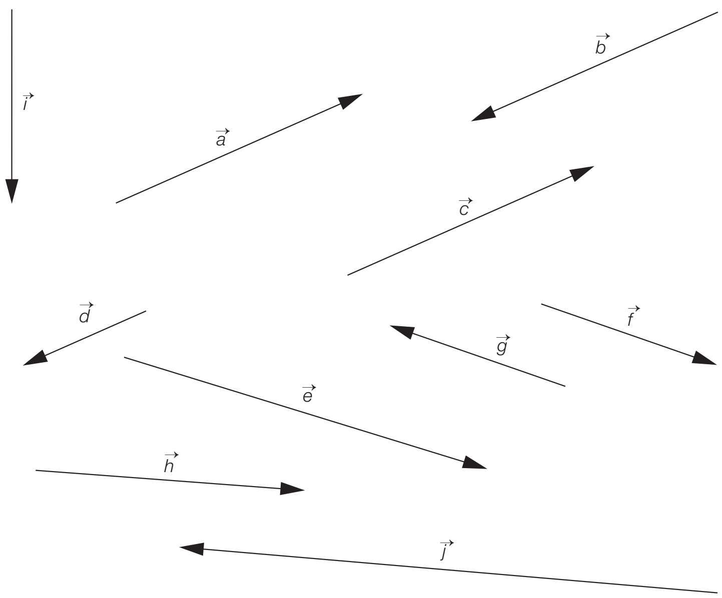
Cours Euler: Série 27

17 avril 2024

Exercice 1

134. Sont-ils égaux ?

Voici dix flèches, représentant des vecteurs, et quelques affirmations à leur propos :



1) $\vec{a} = \vec{c}$ 3) $\vec{b} = -\vec{a}$ 5) $\vec{i} \neq \vec{c}$

2) $\vec{b} = 2\vec{d}$ 4) $\vec{d} \neq \vec{g}$ 6) $\vec{j} = -2\vec{h}$

a) D'après ces renseignements, trouve à quelles conditions deux vecteurs sont égaux.

b) Trouve d'autres égalités entre les vecteurs donnés.

c) Construis des flèches pour les vecteurs :

7) $\vec{k} = 1{,}5\vec{b}$ 9) $\vec{m} = 3\vec{d}$ 11) $\vec{p} = 2{,}5\,\vec{i}$

8) $\vec{l} = -\vec{h}$ 10) $\vec{h} = -0{,}5\vec{j}$ 12) $\vec{q} = \frac{3}{4}\vec{j}$

Exercice 2

Composition. Démontre que la composée $R \circ T$ d'une translation T et d'une rotation non nulle R est une rotation non nulle. Quel est l'angle de cette rotation ? Prouve ta réponse.

Indication. Une translation est la composition $S_b \circ S_a$ de deux symétries axiales dont les axes a et b sont parallèles. Nous savons aussi que l'on peut décomposer R en une composition de deux symétries axiales dont les axes se coupent. Arrange-toi pour choisir b comme premier axe de symétrie.

Exercice 3

Composition de trois symétries axiales.
On a vu que la composée de trois réflexions est soit une réflexion, soit un renversement sans point fixe. Que sont les composées de trois réflexions suivantes ? Justifie. Dans chaque cas, construis un exemple en dessinant l'image d'un triangle par les réflexions successives. Si c'est une réflexion, explique comment on obtient l'axe de la réflexion.

1) Trois axes parallèles.

2) Trois axes concourants.

3) Une translation non nulle suivie d'une réflexion d'axe ayant la même direction que la translation.

   Pour démontrer ta conclusion, tu devras montrer la proposition suivante, ainsi que le fait vu en cours qu'une composée de trois réflexions est soit une réflexion, soit un renversement sans point fixe.

   Proposition
   Pour n'importe quelles trois droites a, b, c du plan, la composée $S_c \circ S_b \circ S_a$ est une réflexion si et seulement si a, b, c ont un point en commun ou sont de même direction.

Exercice 4

Les « cas d'isométrie » suivants sont faux. Donne un contre-exemple dans chaque cas (un croquis propre suffit).

1) Deux triangles ayant un côté et deux angles isométriques sont isométriques.

2) Deux triangles ayant deux côtés et un angle isométriques sont isométriques.

Exercice 5

Construis un triangle dont les longueurs des côtés sont

1) $50mm$, $60mm$ et $40mm$. Indique une marche à suivre ;

2) $80mm$, $40mm$ et $30mm$;

3) $90mm$, $80mm$ et $20mm$.

Exercice 6

Construis un triangle donné par $\alpha = 30°$, $\gamma = 45°$ et $\overline{AB} = 85mm$. Indique la marche à suivre. Que faut-il penser de l'affirmation « deux triangles ayant deux angles isométriques et un côté opposé à l'un de ces angles isométrique sont isométriques » ? Démontre ta réponse.

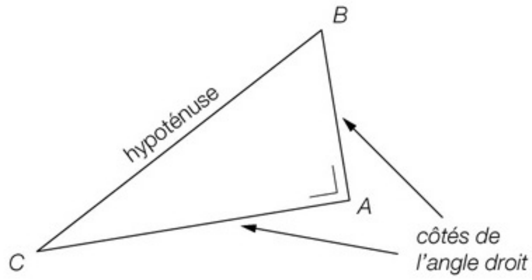
Théorèmes

théorème
theorema (grec) : objet d'étude

Vocabulaire

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit. C'est le plus long côté.

Un triangle rectangle en A est un triangle dont l'angle de sommet A mesure 90°.



Le côté BC est l'hypoténuse du triangle rectangle. Les côtés AB et AC sont les côtés de l'angle droit.

Autre dénomination
Les côtés de l'angle droit sont parfois appelés les cathètes.

Pour ce qui suit, on aura besoin du Théorème de Pythagore : *La somme des carrés des cathètes est égale au carré de l'hypoténuse.* Autrement dit, si $\triangle ABC$ est rectangle en B, alors

$$a^2 + c^2 = b^2$$

où a, b, c sont les longueurs des côtés opposés à A, B, C respectivement.

Exercice 7

Montre que deux triangles rectangles sont isométriques s'ils ont leur hypoténuse isométrique et une cathète isométrique.

Exercice 8

1) Comment construire un triangle dont on connaît la longueur du côté $\overline{BC}$ ainsi que les longueurs g_A de la médiane et h_A de la hauteur issues de A ?

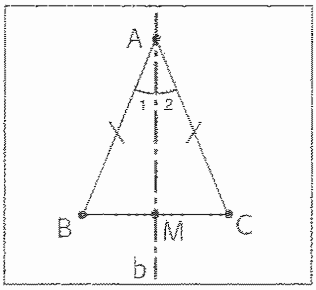
2) Effectue la construction lorsque $\overline{BC} = 120mm$, $g_A = 80mm$ et $h_A = 70mm$.

3) Peut-on énoncer un nouveau cas d'isométrie des triangles ? Justifie (démonstration complète non demandée).

Exercice 9

Dans cet exercice, tu vas travailler une partie de la preuve de la proposition sur la caractérisation des triangles isocèles que nous verrons la semaine prochaine.

266 « Dans tout triangle isocèle, la bissectrice de l'angle au sommet est la médiatrice de la base, la hauteur issue du sommet et la médiane relative à la base ».



Données : le triangle BAC isocèle ($\overline{BA} = \overline{AC}$),

la bissectrice b de $\widehat{A}$ qui coupe [BC] en M.

a) Thèse : **b est la médiatrice de [BC].**

Démonstration

Quel est l'axe de symétrie du triangle BAC ? ....

Par cette symétrie, quelle est l'image

de B ? .... } de [BM] ? ....

de M ? ....

Compare [BM] et son image : ....

Justifie ta comparaison ....

Conclus : ....

b) Thèse : **[AM] est la hauteur relative à [BC].**

Démonstration

Sachant que la bissectrice b de $\widehat{A}$ est aussi la médiatrice de [BC], dis quelle est la position de b par rapport à [BC] ....

Conclus : ....

c) Thèse : **[AM] est la médiane relative à la base.**

Démonstration

Sachant que la bissectrice b de $\widehat{A}$ est aussi la médiatrice de [BC], dis quelle est la position de M par rapport à [BC] ....

Conclus : ....

Le dernier exercice ne concerne pas la théorie de ce chapitre et ne sera pas corrigé.

Exercice 10 (Optionnel)

Une pause logique. Aladin se retrouve dans la boutique d'un génie un peu farceur qui lui montre trois petites caisses fermées. L'une contient des pièces d'or, la deuxième contient des pièces de cuivres, et la dernière un mélange de pièces d'or et de cuivre. Le génie a "par erreur" étiqueté mal les trois caissettes, c'est-à-dire qu'aucune d'entre elles n'indique le contenu correct. Aladin a le droit de mettre sa main dans une seule des trois caisses et d'examiner une seule pièce. Il peut ensuite choisir et emporter une seule des caissettes. Comment faire pour trouver à coup sûr la caisse remplie d'or ?