

---

**Algèbre linéaire avancée II**  
printemps 2024

---

**Série 4 – Corrigé**

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (\*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (\*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (\*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (\*) sera une question ouverte de l'examen final.

---

**Exercice 1.** (+) Soit  $V$  un espace vectoriel et soit  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  une base de  $V$ . Soit  $f : V \times V \rightarrow K$  une forme bilinéaire symétrique telle que

$$f(v_1, v_1) = 2, f(v_2, v_2) = 3, f(v_3, v_3) = -1, f(v_1, v_2) = 0, f(v_2, v_3) = 1, f(v_3, v_1) = -2.$$

1. Écrire la matrice  $A_B^f$  de la forme bilinéaire  $f$  pour la base  $B$ .
2. Trouver une base orthogonale  $C = \{w_1, w_2, w_3\}$  pour  $V$  par rapport à la forme bilinéaire  $f$ .

**Solution.**

1.

$$A_B^f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Une base orthogonale  $C = \{w_1, w_2, w_3\}$  est donnée par exemple par :

$$w_1 = v_1, w_2 = v_2, w_3 = v_1 - 1/3v_2 + v_3.$$

*Il faut d'abord vérifier que ce soit une base, ce qu'on peut faire en vérifiant que les trois vecteurs sont linéairement indépendants, et après que les vecteurs sont orthogonaux, c'est-à-dire que  $f(w_i, w_j) = 0 \quad \forall i \neq j$ .*

**Exercice 2.** Soit  $V$  de dimension finie et  $B$  une base de  $V$ . Montrer que deux formes bilinéaires  $f, g : V \times V \rightarrow K$  sont différentes si et seulement si  $A_B^f \neq A_B^g$ .

**Solution.** Soit  $n$  la dimension de  $V$  et  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Les matrices  $A_B^f$  et  $A_B^g$  sont telles que

$$(A_B^f)_{ij} = f(v_i, v_j) \quad \text{et} \quad (A_B^g)_{ij} = g(v_i, v_j)$$

et, en plus, pour chaque  $x, y \in V$

$$f(x, y) = [x]_B^T A_B^f [y]_B \quad \text{et} \quad g(x, y) = [x]_B^T A_B^g [y]_B.$$

Or, si  $A_B^f = A_B^g$ , pour chaque  $x, y \in V$ ,

$$f(x, y) = [x]_B^T A_B^f [y]_B = [x]_B^T A_B^g [y]_B = g(x, y),$$

donc les deux formes bilinéaires sont les mêmes. Si  $A_B^f \neq A_B^g$ , il existe  $1 \leq i, j \leq n$  où  $(A_B^f)_{ij} \neq (A_B^g)_{ij}$ . Alors

$$f(v_i, v_j) = (A_B^f)_{ij} \neq (A_B^g)_{ij} = g(v_i, v_j),$$

donc les deux formes bilinéaires sont différentes. On conclut que les deux formes bilinéaires  $f$  et  $g$  sont différentes si et seulement si  $A_B^f \neq A_B^g$ .

**Exercice 3.** Soit  $V$  de dimension finie et  $B$  une base de  $V$ . Montrer que une forme bilinéaire  $f : V \times V \rightarrow K$  est symétrique si et seulement si  $A_B^f$  est symétrique.

**Solution.** Soit  $n$  la dimension de  $V$  et  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ .  $A_B^f$  est telle que  $(A_B^f)_{ij} = f(v_i, v_j)$  et pour chaque  $x, y \in V$ ,  $f(x, y) = [x]_B^T A_B^f [y]_B$ . Or, si  $A_B^f$  est symétrique, pour chaque  $x, y \in V$ ,

$$f(x, y) = [x]_B^T A_B^f [y]_B = [x]_B^T (A_B^f)^T [y]_B = ([y]_B^T A_B^f [x]_B)^T = (f(y, x))^T = f(y, x),$$

car  $f(x, y)$  est un scalaire, donc  $f$  est symétrique. Si  $A_B^f$  n'est pas symétrique, il existe  $1 \leq i, j \leq n$  où  $(A_B^f)_{ij} \neq (A_B^f)_{ji}$  et

$$f(v_i, v_j) = (A_B^f)_{ij} \neq (A_B^f)_{ji} = f(v_j, v_i),$$

donc  $f$  n'est pas symétrique. On conclut que  $f$  est symétrique si et seulement si  $A_B^f$  est symétrique.

**Exercice 4.** Soit  $V = \mathbb{R}_3[x]$ , l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 sur  $\mathbb{R}$ , muni de la forme

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx.$$

1. La forme est-elle bilinéaire ? Symétrique ? Non-dégénérée ?
2. Décrire la matrice  $A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  pour  $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ .

3. Montrer que l'ensemble  $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$  de polynômes

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 & p_1 &= x \\ p_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & p_3 &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \end{aligned}$$

est une base orthogonale de  $V$ .

**Solution.**

1. On vérifie simplement chacune des propriétés à l'aide des définitions du cours.

2.

$$A_B^{\langle \cdot, \cdot \rangle} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 2/5 \\ 2/3 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 2/7 \end{pmatrix}$$

3. Soit  $q \in V$ . Nous écrivons  $q = q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x^1 + q_0$ . Alors,

$$\begin{aligned} q &= q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x^1 + q_0 \\ &= \frac{2}{5}q_3p_3 + q_2x^2 + (q_1 + \frac{3}{5}q_3)x + q_0 \\ &= \frac{2}{5}q_3p_3 + \frac{2}{3}q_2p_2 + (q_1 + \frac{3}{5}q_3)x + (q_0 + \frac{1}{3}q_2) \\ &= \frac{2}{5}q_3p_3 + \frac{2}{3}q_2p_2 + (q_1 + \frac{3}{5}q_3)p_1 + (q_0 + \frac{1}{3}q_2)p_0. \end{aligned}$$

Cela implique que  $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$  est un système générateur de  $V$  et  $|\{p_0, p_1, p_2, p_3\}| = \dim V$  implique que c'est une base.

On montre ensuite que  $\langle p_i, p_j \rangle = 0$  pour  $i \neq j$ . Par exemple,

$$\begin{aligned} \langle p_2, p_3 \rangle &= \int_{-1}^1 p_2 p_3 dx \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (3x^2 - 1)(5x^3 - 3x) dx \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{5}{2}x^6 - \frac{7}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Exercice 5.** On considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ et } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^4.$$

Est-ce que  $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$  possède une base orthogonale par rapport à la forme bilinéaire symétrique standard ?

**Solution.** La réponse est non. On considère tous les 7 vecteurs non nuls dans l'espace  $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ . Il faut seulement vérifier que tout triplet de vecteurs de  $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$  orthogonaux forment une liste linéairement dépendante.

Voici toutes les paires de vecteurs non nuls de  $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$  qui sont orthogonales (on doit aussi considérer les combinaisons linéaires des  $v_1, v_2$  et  $v_3$ ).

$$\begin{aligned} (v_1, v_3), & & (v_1, v_1 + v_3), \\ (v_2, v_1 + v_3), & & (v_3, v_1 + v_3), \\ (v_2, v_1 + v_2 + v_3), & & (v_1 + v_2, v_2 + v_3), \\ (v_1 + v_2, v_1 + v_3), & & (v_1 + v_3, v_2 + v_3), \\ (v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_3). \end{aligned}$$

Les triplets de vecteurs de  $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$  orthogonaux sont  $(v_1, v_3, v_1 + v_3)$  et  $(v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3)$  et on conclut facilement que ces deux listes sont linéairement dépendantes.

Ainsi  $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$  n'admet pas de bases orthogonales.

**Exercice 6.** Soit une forme bilinéaire symétrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\mathbb{R}$  telle qu'il existe deux vecteurs  $u, v \in \mathbb{R}^n$  vérifiant

- $\langle u, u \rangle > 0$ , et
- $\langle v, v \rangle < 0$ .

Montrer qu'il existe un vecteur  $w \in \mathbb{R}^n$  non nul tel que  $\langle w, w \rangle = 0$ .

En déduire que le procédé de Gram-Schmidt est parfois impossible si la forme bilinéaire n'est ni définie positive, ni définie négative.

**Solution.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  le segment entre  $u$  et  $v$  :

$$f(t) = (1 - t)u + tv.$$

L'application  $t \mapsto \langle f(t), f(t) \rangle$  est continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , elle est strictement positive en  $t = 0$  et strictement négative en  $t = 1$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un  $s \in (0, 1)$  tel que l'application s'annule.

Le vecteur  $w = (1 - s)u + sv$  est un vecteur non nul car  $u$  et  $v$  sont non colinéaires (pourquoi?).

Le procédé de Gram-Schmidt sur la base  $\{w, x\}$  est impossible pour un  $x \in \mathbb{R}^n$  général, par exemple, car pour que  $x - \alpha w$  soit perpendiculaire à  $w$ , on devrait avoir

$$\langle w, x - \alpha w \rangle = 0.$$

L'équation n'admet aucune solution si  $w$  et  $x$  ne sont pas déjà perpendiculaires. De plus, on peut montrer assez facilement que  $u$  et  $v$  ne peuvent pas tous les deux être perpendiculaires à  $w$ .

**Exercice 7.** Montrer que la relation de congruence  $\cong$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices  $K^{n \times n}$ .

Rappel : deux matrices  $A, B \in K^{n \times n}$  sont *congruentes* s'il existe une matrice  $P \in K^{n \times n}$  inversible telle que  $A = P^T B P$ .

**Solution.** Pour montrer que  $\cong$  est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices  $K^{n \times n}$ , il suffit de montrer que la relation est

1. réflexive:  $A \cong A$ .
2. symétrique:  $A \cong B \Rightarrow B \cong A$ .
3. transitive:  $A \cong B$  et  $B \cong C \Rightarrow A \cong C$ .

1. *Réflexivité.* On a que

$$A = I^T A I,$$

où  $I$  est la matrice identité dans l'ensemble des matrices  $K^{n \times n}$ . Donc  $A \cong A$ .

2. *Symétrie.* Si  $A \cong B$ ,  $\exists P \in K^{n \times n}$  inversible tel que

$$A = P^T B P,$$

donc

$$B = P^{-T} A P^{-1},$$

et  $B \cong A$ .

3. *Transitivité.* Soit  $A \cong B$  et  $B \cong C$ . Donc  $\exists P, Q \in K^{n \times n}$  inversibles tels que

$$A = P^T B P \quad \text{et} \quad B = Q^T C Q.$$

Donc on a

$$A = P^T Q^T C Q P = (QP)^T C (QP),$$

où la matrice  $QP$  est inversible puisque  $Q$  et  $P$  sont inversibles. Donc  $A \cong C$ .

**Exercice 8.** (\*) Soit  $K$  un corps de caractéristique différente de 2, et  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Considérons une forme bilinéaire  $f$  sur  $V$  qui est *anti-symétrique*, c'est-à-dire

$$f(x, y) = -f(y, x) \quad \forall x, y \in V.$$

Montrer que si  $f$  est non-dégénérée, alors  $n$  est pair.

L'implication inverse est-elle vraie ?

**Solution.**