

Algèbre linéaire avancée II
printemps 2026

Série 3

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. Soit V un espace vectoriel réel et soit $B = \{v_1, \dots, v_4\}$ une base de V .

i) (+) Soit f l'endomorphisme défini par

$$f(v_1) = v_1 - v_2, f(v_2) = 2v_2 - 6v_3, f(v_3) = -2v_1 + 2v_2, f(v_4) = v_2 - 3v_3 + v_4.$$

Écrivez la matrice A_B de l'application f dans la base $B = \{v_1, \dots, v_4\}$. Est-ce que f est inversible? Si oui, écrivez la matrice A_B^{-1} de l'application inverse $f^{-1} : V \longrightarrow V$.

ii) Maintenant, soit g un autre endomorphisme défini par

$$g(v_1) = v_1 + 2v_2, g(v_2) = v_3 + v_4, g(v_3) = v_1 + v_2 + v_3, g(v_4) = 3v_2 - 2v_3.$$

Écrivez la matrice C_B de l'application g dans la base $B = \{v_1, \dots, v_4\}$. Est-ce que g est inversible? Si oui, écrivez la matrice C_B^{-1} de l'application inverse $g^{-1} : V \longrightarrow V$.

iii) Maintenant, soit $B' = \{w_1, \dots, w_4\}$ une autre base de V telle que

$$v_1 = w_1 + w_2, v_2 = w_3 + w_4, v_3 = w_1 + w_2 + w_3, v_4 = w_2 + w_4.$$

Écrivez la matrice $P_{BB'}$ de changement de base, c'est-à-dire $[v]_{B'} = P_{BB'}[v]_B$. Écrivez la matrice $A_{B'}$ de l'application f dans la base B' , et la matrice $C_{B'}$ de l'application g dans la base B' .

Rappel:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow \phi_B & & \downarrow \phi_B \\ K^n & \xrightarrow{A} & K^n \end{array}$$

Exercice 2. Sachant que $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = 5$, calculer

$$\det \begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ g & h & i \\ 4d + 3g & 4e + 3h & 4f + 3i \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit K un corps fini tel que $|K| = n$.

i) Montrer que chaque $a \in K^*$ satisfait $a^{n-1} = 1$.

Indice : Théorème de Lagrange.

ii) Observer que le polynôme $f(x) = x^n - x + 1$ ne possède pas de racines dans K .

iii) Conclure qu'il existe des polynômes irréductibles dans $K[x]$ de degré au moins 2.

Indice : Factorisation de $f(x)$ en irréductibles.

Exercice 4. Soit K un corps et $A \in K^{n \times n}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

i) Quel est le polynôme minimal $p_{e_1}(x) \in K[x]$ du vecteur $e_1 \in K^n$?

ii) Quel est le polynôme minimal $p(x) \in K[x]$ de la matrice A ?

Indice : Théorème de Cayley–Hamilton et Théorème 2.20.

Exercice 5. Factoriser $f(x) \in K[x]$ en polynômes irréductibles.

i) $f(x) = 3x^4 + 2$, $K = \mathbb{Z}_5$.

iv) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, $K = \mathbb{Z}_3$.

ii) $f(x) = 3x^4 + 2$, $K = \mathbb{Z}_{11}$.

v) $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$, $K = \mathbb{Z}_{13}$.

iii) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, $K = \mathbb{Z}_7$.

vi) $f(x) = x^4 - x^2 + x - 1$, $K = \mathbb{Z}_{17}$.

Exercice 6. Calculer $\gcd(f, g)$ et $p, q \in K[x]$ tel que $\gcd(f, g) = p \cdot f + q \cdot g$:

i) $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x^3 + 4x^2 + x + 1$, $K = \mathbb{Z}_5$

ii) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $K = \mathbb{Z}_2$

iii) $f(x) = x^2 - x - 2$, $g(x) = x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 7x - 6$, $K = \mathbb{Q}$.

Exercice 7. Soient E, F deux corps tels que $F \subseteq E$.

- i) Montrer que E est un espace vectoriel sur F avec multiplication externe $e \cdot f$, $e \in E$, $f \in F$ étant la multiplication sur E en vérifiant l'associativité, la distributivité et la neutralité de $1_E = 1_F$.
- ii) Maintenant, soit E vu comme espace vectoriel sur F de dimension finie et soit $e \in E \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe un polynôme $f(x) \in F[x] \setminus \{0\}$ tel que $f(e) = 0$.
- iii) Montrer qu'il y a un seul tel polynôme $p_e(x) \neq 0$ de degré minimal et de coefficient dominant égal à 1.
- iv) Montrer que ce polynôme $p_e(x)$ est irréductible.

Exercice 8. Soit K un corps. On écrit $\frac{\partial}{\partial x} : K[x] \rightarrow K[x]$ pour l'application K -linéaire tel que $\frac{\partial}{\partial x} x^n = nx^{n-1}$ pour chaque $n \geq 0$ (où n est regardé en tant qu'élément de K à travers l'homomorphisme canonique $\mathbb{Z} \rightarrow K$).

Soient $f, g \in K[x]$, montrer que $\frac{\partial}{\partial x}(f \cdot g) = f \cdot \frac{\partial}{\partial x}(g) + \frac{\partial}{\partial x}(f) \cdot g$.

Soient $h \in K[x]$ et $\alpha \in K$. Montrer que α est racine multiple de h si et seulement si $h(\alpha) = 0$ et $\frac{\partial}{\partial x}(h)(\alpha) = 0$.

Exercice 9. Le but de cet exercice est la construction du corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ à partir de l'anneau des nombres entiers $\mathbb{Z}$.

- i) On définit sur l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ la relation: $(a, b) \sim (a', b')$ si et seulement si $ab' = a'b$. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.
- ii) Maintenant, on désigne $\frac{a}{b}$ la classe (a, b) et on définit $\mathbb{Q}$ comme l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ par $\sim$.

Soient $a, a' \in \mathbb{Z}$ et $b, b' \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ alors on munit $\mathbb{Q}$ des opérations suivantes:

a) somme: $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + a'b}{bb'}$,

b) produit: $\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}$.

Montrer que ces opérations sont bien définies.

- iii) Montrer que $\mathbb{Q}$ est un corps qui contient $\mathbb{Z}$ sous la forme d'un sous-anneau via l'homomorphisme d'inclusion

$$\iota : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} : n \mapsto \iota(n) = \frac{n}{1}.$$

En particulier montrer que $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$ sont le zéro et l'unité de $\mathbb{Q}$.

Exercice 10. (*) Soit K un corps, et $f, g \in K[x]$ deux polynômes pas tous les deux nuls. Considérons l'ensemble des diviseurs communs à f et g :

$$\mathcal{D}_{f,g} = \{d \in K[x] : d|f, d|g\}.$$

- i) Montrer qu'il existe un unique polynôme $d \in \mathcal{D}_{f,g}$ unitaire et de degré maximal.
- ii) Montrer que $d = \gcd(f, g)$.