Algèbre linéaire avancée II
printemps 2025

Série 3 – Corrigé

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

Exercice 1. (+) Soit V un espace vectoriel sur un corps K de dimension finie et $f : V \rightarrow V$ un endomorphisme. Soit $p : V \rightarrow V$ un automorphisme (c'est-à-dire un endomorphisme inversible). Montrer que $\lambda \in K$ est une valeur propre de f si et seulement si λ est une valeur propre de l'endomorphisme $p^{-1} \circ f \circ p$.

Solution. $\Rightarrow$: Soit λ une valeur propre de f . On montre que c'est une valeur propre de $p^{-1} \circ f \circ p$. En effet, soit $v \neq 0$ un vecteur propre de f de valeur propre λ . On considère $w = p^{-1}(v)$. Alors $w \neq 0$ par injectivité de p^{-1} et

$$p^{-1} \circ f \circ p(w) = p^{-1} \circ f(v) = p^{-1}(\lambda v) = \lambda p^{-1}(v) = \lambda w$$

où on a utilisé la linéarité de p^{-1} pour sortir λ .

$\Leftarrow$: Soit λ une valeur propre de $p^{-1} \circ f \circ p$. On montre que c'est une valeur propre de f . En effet, soit $w \neq 0$ un vecteur propre de $p^{-1} \circ f \circ p$ de valeur propre λ . On considère $v = p(w)$. Alors $v \neq 0$ par injectivité de p et

$$f(v) = f \circ p(w) = p \circ p^{-1} \circ f \circ p(w) = p(\lambda w) = \lambda p(w) = \lambda v$$

où on a utilisé la linéarité de p pour sortir λ .

Exercice 2. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie et G un groupe d'automorphismes linéaires de V . Supposons que les seuls sous-espaces G -invariants sont V et $\{0\}$.

Montrer qu'un endomorphisme non-nul $f : V \rightarrow V$ qui commute avec tous les éléments de G est inversible.

En déduire que f est de la forme $\lambda \cdot \text{id}$.

Solution. On montre que $\ker(f)$ est G -invariant. En effet pour $x \in \ker(f)$ et $g \in G$ on a

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(0) = 0.$$

Ainsi $\ker(f)$ est G -invariant et comme $\ker(f) \neq V$ on observe que f est inversible.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de f alors on a que $f - \lambda \cdot \text{id}$ commute avec tous les éléments de G . Si $f - \lambda \cdot \text{id}$ est non-nulle alors par la première partie on obtient une contradiction. Ainsi $f - \lambda \cdot \text{id} = 0$ et on a gagné.

Exercice 3. Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & i & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

Solution. 1. La matrice A est triangulaire supérieure. On sait que les valeurs propres sont les éléments diagonaux : $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -1$. Les valeurs propres sont toutes distinctes les unes des autres, donc la matrice A est diagonalisable.

2. Les valeurs propres de B sont les zéros du polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} p_B(t) &= \det(tI_3 - B) = \det \begin{pmatrix} t-5 & 1 & 1 \\ 1 & t-5 & 1 \\ 1 & 1 & t-5 \end{pmatrix} \\ &= (t-5)^3 + 1 + 1 - (t-5)(1+1+1) \\ &= t^3 - 15t^2 + 72t - 108. \end{aligned}$$

On voit que la matrice $6I_3 - B$ a tous ses éléments égaux à 1, elle est donc singulière. Ainsi, 6 est une racine de p_B . On peut alors factoriser p_B et obtenir

$$p_B(t) = (t-6)(t^2 - 9t + 18) = (t-3)(t-6)(t-6).$$

Les valeurs propres de B sont alors $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$. On a $m_{\text{alg}}(3) = 1$ et $m_{\text{alg}}(6) = 2$. D'office on a $m_{\text{geom}}(3) = 1$, mais nous devons encore calculer la dimension de $E_6(B)$ afin de savoir si on a $m_{\text{geom}}(6) = 2$ ou $m_{\text{geom}}(6) = 1$. On a

$$E_6(B) = \ker(6I_3 - B) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit que $\text{rank}(6I_3 - B) = 1$. Donc la dimension du noyau est 2, et ainsi $m_{\text{geom}}(6) = 2$. On obtient que $m_{\text{alg}}(\lambda) = m_{\text{geom}}(\lambda)$ pour toutes les valeurs propres λ et donc B est diagonalisable.

3. La matrice C a pour polynôme caractéristique

$$p_C(t) = t^3 - t^2 - t + 1 = (t+1)(t-1)(t-1).$$

Ses valeurs propres sont donc -1 et 1 . On obtient $m_{\text{alg}}(-1) = 1 = m_{\text{geom}}(-1)$ et $m_{\text{alg}}(1) = 2$. Par ailleurs,

$$E_1(C) = \ker(I_3 - C) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit que $\dim E_1(C) = 1$, et on obtient $m_{\text{geom}}(1) = 1$. Comme $m_{\text{geom}}(1) = 1 \neq 2 = m_{\text{alg}}(1)$, la matrice C n'est pas diagonalisable.

Exercice 4. Soit $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ bijective (c'est-à-dire une permutation). On définit $f_\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ par $f_\pi((x_1, x_2, \dots, x_n)^T) = (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)})^T$. Calculer toutes les valeurs propres réelles de f_π et les espaces propres associés.

Solution. Pour un vecteur propre v avec valeur propre λ , on a $|\lambda| \|v\| = \|\lambda v\| = \|f_\pi(v)\| = \|v\|$. Ceci implique que les seules valeurs propres réelles possibles sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.

Soit v un vecteur propre pour $\lambda_1 = 1$. Ceci est équivalent à la condition

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ on a } v_i = (f_\pi(v))_i = v_{\pi(i)} \quad \text{et} \quad v \neq 0.$$

Ainsi, l'espace propre est donné par

$$E_1 = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ on a } v_i = v_{\pi(i)}\}.$$

On montre que $\dim(E_1) > 0$. C'est vrai car $f_\pi((1, \dots, 1)^T) = (1, \dots, 1)^T$ implique $(1, \dots, 1)^T \in E_1$.

On considère $\lambda_2 = -1$. Comme π est bijective sur l'ensemble fini $\{1, \dots, n\}$, pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, il y a un entier minimal $0 < n_i \leq n$ tel que $\pi^{n_i}(i) = i$. Soit v un vecteur propre pour $\lambda_2 = -1$. Ceci est équivalent à la condition

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ on a } v_i = -(f_\pi(v))_i = -v_{\pi(i)} \quad \text{et} \quad v \neq 0. \quad (1)$$

Mais si $n_i \equiv 1 \pmod{2}$ pour tout i , ça implique $v_i = -v_i$ pour tout i , et le seul vecteur qui satisfait les conditions est $(0, \dots, 0)^T$. Donc -1 n'est pas une valeur propre dans ce cas.

S'il existe un $k \in \{1, \dots, n\}$ avec $n_k \equiv 0 \pmod{2}$, nous obtenons une série

$$v_k = -v_{\pi(k)} = v_{\pi^2(k)} = -v_{\pi^3(k)} = \dots = v_{\pi^{n_k}(k)} = v_k,$$

avec $\pi^i(k) \neq \pi^j(k)$ pour $i \neq j$ (car n_k est minimal). Le vecteur $v \neq 0$ donné par

$$v_i = \begin{cases} 1 & i = \pi^j(k) \text{ pour } j \equiv 0 \pmod{2} \\ -1 & i = \pi^j(k) \text{ pour } j \equiv 1 \pmod{2} \\ 0 & i \neq \pi^j(k) \text{ pour chaque } j \in \{0, \dots, n-1\} \end{cases}$$

remplit la condition (1). Ainsi, s'il existe un $n_k \equiv 0 \pmod{2}$, -1 est une valeur propre et l'espace propre est donné par

$$E_{-1} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ on a } v_i = -v_{\pi(i)}\}.$$

Exercice 5. Calculer les valeurs propres et les espaces propres des matrices suivantes sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ (avec $\varphi \in [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}$ dans le cas 2).

$$1. A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2. A_2 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad 3. A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution. 1. Le polynôme caractéristique est $\det(A_1 - \lambda I) = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$.

Pour $\lambda_1 = 1$, on a $A_1 x = x \Leftrightarrow x_1 = x_2$, et pour $\lambda_2 = -1$, on a $A_2 x = -x \Leftrightarrow x_2 = -x_1$. Les espaces propres sont alors $E_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ pour λ_1 , et

$E_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ pour λ_2 . Les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sont identiques.

2. $\det(A_2 - \lambda I) = (\cos(\varphi) - \lambda)^2 + \sin^2(\varphi) = \lambda^2 - 2\lambda \cos(\varphi) + 1$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\varphi \notin \{\pi t \mid t \in \mathbb{Z}\}$, ce terme n'a pas de racine réelle, c'est-à-dire nous n'avons pas de valeur propre dans $\mathbb{R}$. En effet, le discriminant du polynôme caractéristique est $\Delta = (-2 \cos(\varphi))^2 - 4 = 4(\cos(\varphi)^2 - 1) < 0$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\varphi \in \{\pi t \mid t \in \mathbb{Z}\}$, nous avons $A_2 = I$ et tous les vecteurs non égaux à 0 sont vecteurs propres.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a $\lambda_{1,2} = \cos(\varphi) \pm i \sin(\varphi)$. La valeur propre λ_1 est associée à l'espace propre

$$\sin(\varphi) \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} v_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}.$$

Avec un calcul similaire on détermine l'espace propre E_2 associé à la valeur propre λ_2 .

3. On a

$$\begin{aligned} \det(A_3 - \lambda I) &= (3 - \lambda)^2(5 - \lambda) + 2 - 2(3 - \lambda) - (5 - \lambda) \\ &= -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36 \\ &= (6 - \lambda)(3 - \lambda)(2 - \lambda) \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$ et

$$E_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad E_3 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 6. Considérons la suite de Fibonacci $\{F_n\}_{n \geq 0}$ définie récursivement par

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 2). \end{cases}$$

Soit $X_n := \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$ pour $n \geq 0$.

1. Trouver la matrice $A \in \mathbb{R}^2$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. Diagonaliser $A = PDP^{-1}$ en explicitant P et D .

3. En déduire de la relation $X_n = A^n X_0$ une expression fonctionnelle pour F_n en fonction de n .

Solution. 1. On trouve $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Pour diagonaliser A on calcule le polynôme caractéristique p_A .

$$p_A(\lambda) = (-1)^2 \lambda^2 + (-1)^1 \operatorname{Tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Ses racines sont $\phi_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, le nombre d'or et son conjugué. Des vecteurs propres associés sont par exemple $v_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \phi_{\pm} \end{pmatrix}$.

On a alors $P = (v_+ \ v_-)$ et $D = \begin{pmatrix} \phi_+ & 0 \\ 0 & \phi_- \end{pmatrix}$ qui vérifient $A = PDP^{-1}$.

3. Par conséquent, $X_n = A^n X_0 = PD^n P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On ne s'intéresse donc qu'à la première coordonnée de la deuxième colonne de $PD^n P^{-1}$. Ceci donne

$$F_n = \frac{\phi_+^n - \phi_-^n}{\sqrt{5}}.$$

Exercice 7. Cet exercice aborde le théorème de Cayley-Hamilton.

1. Vérifier ce théorème sur la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

2. Soient K un corps, et $A \in K^{2 \times 2}$. Soit $p_A(t) = t^2 + a_1 t + a_0$ avec $a_0 \neq 0$.
Démontrer que A est inversible et exprimer son inverse comme combinaison K -linéaire de I et A .
3. Considérer le Théorème de Cayley-Hamilton. On pourrait penser qu'il est possible d'utiliser l'argument $p_A(A) = \det(A \cdot I_n - A) = 0$ pour montrer le théorème. Montrer que ce raisonnement est faux.

Solution. 1. On calcule le polynôme caractéristique de A , on trouve

$$p_A(t) = \det(tI_3 - A) = t^3 - t^2 + 3.$$

Si on évalue p_A en A on trouve

$$\begin{aligned}
 p_A(A) = A^3 - A^2 + 3I_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^3 - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

et donc le théorème est vérifié.

2. $\det(A) = p_A(0) = a_0 \neq 0$, donc A est bien inversible. Par le théorème de Cayley-Hamilton on a $A^2 + a_1A + a_0I_2 = 0_2$. En appliquant A^{-1} à gauche on a $A + a_1I_2 + a_0A^{-1} = 0_2$, ce qui donne $A^{-1} = -(A + a_1I_2)/a_0$.
3. Soit R un anneau commutatif et $n > 1$. L'expression $\det(A \cdot I_n - A)$ ne peut pas être égale à l'évaluation du polynôme p_A en A , car la première est un élément de l'anneau R , tandis que la seconde est un élément de $R^{n \times n}$.

Exercice 8. (*) Soient K un corps, et $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ les valeurs propres d'une matrice $A \in K^{n \times n}$ et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités algébriques. Soit $m_1 + \dots + m_r = n$. Rappelez-vous que la trace de A est définie par $\text{Tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Démontrer les assertions suivantes:

1. $\det(A) = \prod_{i=1}^r \lambda_i^{m_i}$,
2. si $p_A(\lambda) = \alpha_n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$ alors $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1} \text{Tr}(A)$,
3. $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^r m_i \lambda_i$.

Solution.