**Algèbre linéaire avancée II**
printemps 2025

**Série 2**

L'exercice marqué d'un (+) sert d'introduction à la série, tandis que celui marqué d'une (*) est plus difficile. Tous les exercices sauf celui marqué d'une (*) seront corrigés. La correction sera postée sur Moodle 2 semaines après. Les solutions des exercices (*) et (+) seront discutées dans les séances d'exercices du mardi d'après et d'avant respectivement. Un des exercices (*) sera une question ouverte de l'examen final.

**Exercice 1.** (+) Soit $K$ un corps et $f(x) \in K[x]$ un polynôme de degré 3. Montrer que $f(x)$ est irréductible si et seulement si $f(x)$ n'a pas de racines dans $K$.

**Exercice 2.** Soit $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ tel que $a_n, a_0 \neq 0$. Montrer que si une fraction irréductible $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ est racine du polynôme $f(x)$, alors $p$ divise $a_0$ et $q$ divise $a_n$.
Utiliser ce résultat pour trouver la factorisation des polynômes $g(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$ et $h(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 3$ dans $\mathbb{R}[x]$.

**Exercice 3.** Soient des matrices $A, B, Q, D \in K^{n \times n}$ sur un corps $K$. Montrer que :

i) $\det(I + AB) = \det(I + BA)$ si $A$ et $B$ sont inversibles,

ii) $\det(Q) = \pm 1$ si $Q$ est orthonormale ($Q^T Q = I$),

iii) $\det(A + zI)$ est un polynôme de $K[z]$ de degré $n$,[1]

iv) $\det(D_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ si $D$ est antidiagonale définie par

$$(D_n)_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i + j = n + 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} .$$

**Exercice 4.** Soit $K$ un corps.

i) Montrer qu'un polynôme $p(x)$ divise chaque $f(x) \in K[x]$ si et seulement si $p(x) = a$ pour un élément $a \neq 0$ de $K$.

[1] Utiliser la formule du déterminant de Leibniz pour expliciter les coefficients du polynôme.

ii) Soient $f(x), g(x) \in K[x] \setminus \{0\}$. On considère les assertions suivantes: a) $f(x) = ag(x)$, $a \in K \setminus \{0\}$. b) $f(x)$ et $g(x)$ ont les mêmes racines (avec multiplicité).

Montrer que a) implique b). Est-ce que b) implique a)? Justifiez votre réponse.

**Exercice 5.** Cet exercice concerne le théorème 1.12 des notes du cours. Soient $f$ et $g$ deux polynômes sur $K$ non tous deux nuls et soit

$$I = \{u \cdot f + v \cdot g \colon u, v \in K[x]\}.$$

Montrer que $I$ est un sous-groupe de $(K[x], +)$ et que pour tout $h \in I$ et tout $w \in K[x]$, $h \cdot w \in I$. On appelle $I$ l'*idéal* de $K[x]$ généré par $f$ et $g$.

**Exercice 6.** Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant:

Soit $R$ un anneau commutatif, intègre et fini alors $R$ est un corps.

Soit donc $r \in R \setminus \{0_R\}$, on veut montrer que $r$ admet un inverse dans $R$. Pour cela on considère la suite d'éléments de R, donnée pour tout entier $i \geq 0$ par

$$a_i := r^i = r \cdot \ldots \cdot r \text{ ($i$ fois)}$$

avec $a_0 = 1_R$.

i) Montrer qu'il existe deux entiers $0 \leq m < n$ tels que $r^n = r^m$.

ii) En deduire qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $r^k - 1_R = 0_R$.

iii) Conclure la preuve.

**Exercice 7.** (*) Soit $K$ un corps, et $A \in K^{n \times n}$ une matrice inversible. Posons $\widetilde{A} := (\text{com}A)^T$, la transposée de la comatrice de $A$.[2]

i) Montrer que $\det(A) \neq 0$.

ii) Montrer que $A^{-1} = \det(A)^{-1}\widetilde{A}$.

iii) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, il existe $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ telle que $AB = I$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.

[2]Rappel :

$$(\text{com}A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}),$$

où $A_{i,j}$ est la matrice obtenue en supprimant la $i$-ème ligne et la $j$-ème colonne de $A$.