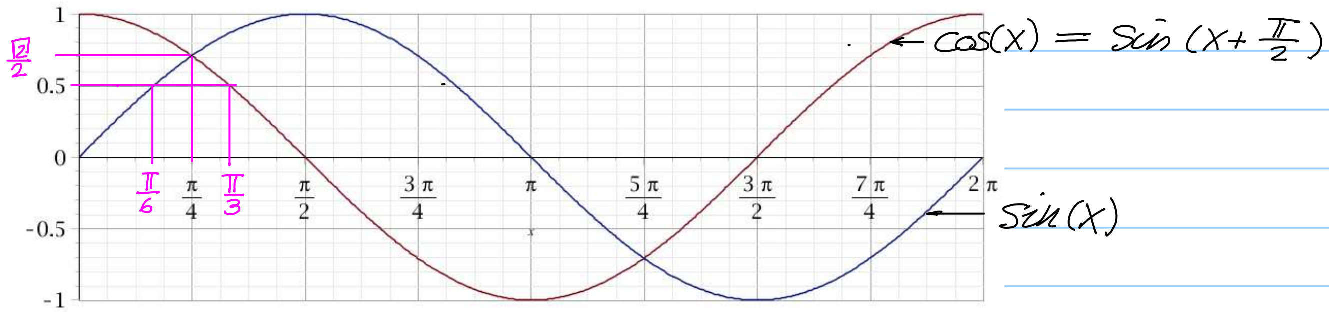
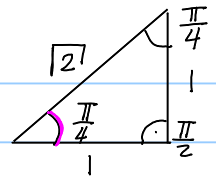
Prélude

Voir série -1

Fonctions élémentaires (exemples)

$\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$

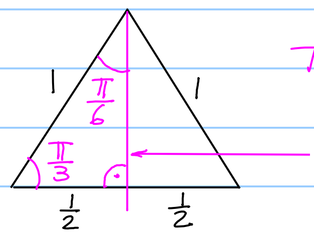




triangle isocèle ($\sqrt{2} = \sqrt{1^2+1^2}$ par Pythagore)

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



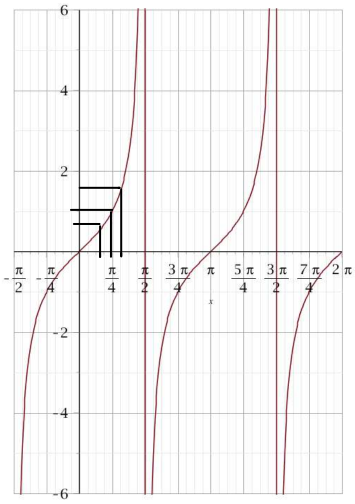
triangle équilatéral

$$\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \sqrt{2} = 1.414\ldots, & \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707\ldots, & \\ \sqrt{3} = 1.732\ldots, & \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866\ldots, & \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577\ldots \end{array}}$$



$$tg(x) \equiv \tan(x)$$

notations équivalentes

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

"est par définition égal à"

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

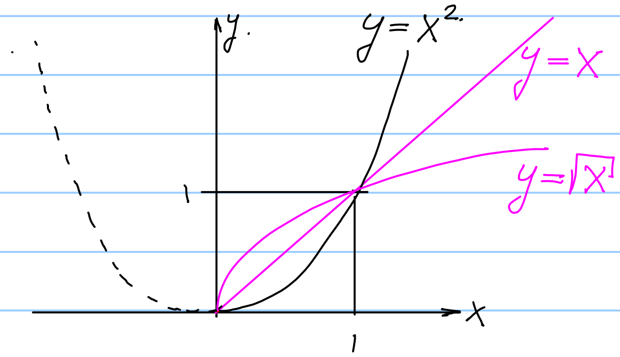
Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Prélude

Voir série -1

Paires de fonctions réciproques

i) x^2 , $\sqrt{x}$



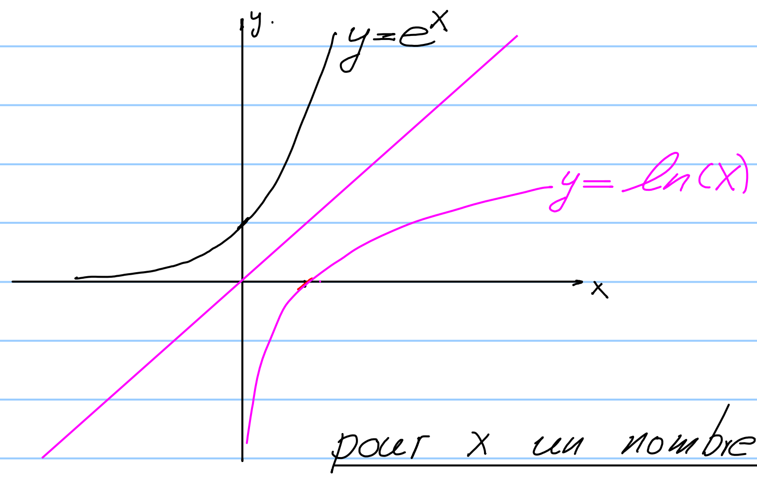
pour x un nombre positif ou zéro :

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x^2} = x \\ (\sqrt{x})^2 = x\end{array}\right\} (*)$$

(*) implique que x^2 et $\sqrt{x}$ sont des fonctions réciproques.

ii) $e^x \equiv \exp(x)$, $\ln(x)$ (= logarithme népérien)

$\ulcorner$ $\mathrm{Log}(x) \equiv \ln(x)$ $\lrcorner$

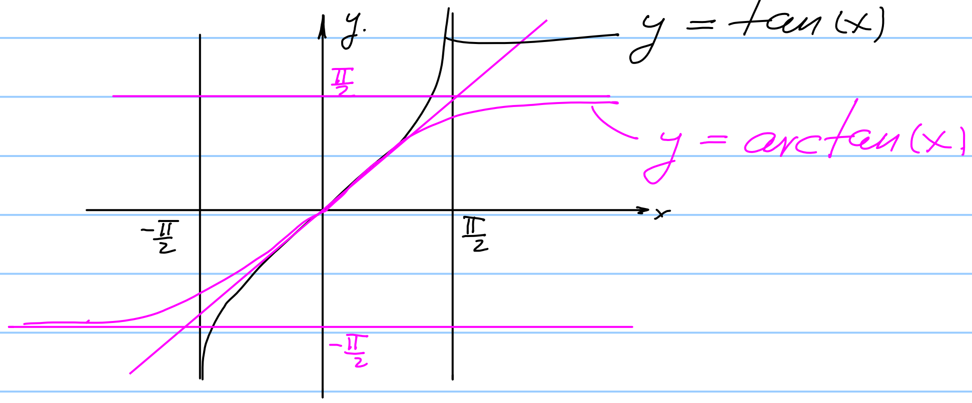


positif, zéro ou négatif

$$\left.\begin{array}{ll}\text{pour } x \text{ un nombre positif :} & e^{\ln(x)} = x \\ \text{pour } x \text{ un nombre quelconque :} & \ln(e^x) = x\end{array}\right\} (*)$$

(*) implique que e^x et $\ln(x)$ sont des fonctions réciproques.

iii). $\underline{\tan(x), \arctan(x)}$



pour x un nombre quelconque : $\tan(\arctan(x)) = x$

pour x un nombre entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$: $\arctan(\tan(x)) = x$

$\left.\right\}$ (∗).

(∗) implique que $\tan(x)$ et $\arctan(x)$ sont des fonctions réciproques

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Prélude

Voir série -1

Puissances, racines, etc. (règles de calcul)

Pour a, b des nombres positifs et m, n des entiers positifs ou zéro :

Convention: $a^{\overset{\text{zéro}}{0}} = 1$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{m \cdot n} = (a^m)^n$$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} = a^m \cdot b^{-m} = \frac{b^{-m}}{a^{-m}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

On a les mêmes règles de calcul pour a^x pour x un nombre non entier. En particulier on écrit

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}} \qquad (\text{où } a > 0 \text{ !})$$

pour (l'unique) nombre positif tel que $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$.

Remarque: pour n un entier naturel impair on trouve dans la literature la notation $\sqrt[n]{a}$ aussi pour $a < 0$, et dans ce cas, et dans ce cas seulement

$$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$$

La fonction réciproque de la fonction a^x, $a>0$, $a\neq 1$

est appelée $\log_a(x)$ ce qui veut dire que

$$a^{\log_a(x)} = x \qquad \text{pour } x \text{ un nombre positif}$$

$$\log_a(a^x) = x \qquad \text{pour } x \text{ un nombre quelconque}$$

Identités qui découlent de la réciprocité

$$\log_a(1) = 0 \quad \text{et} \quad \log_a(a) = 1$$

pourquoi ?

$$\left.\begin{aligned} \log_a(x\cdot y) &= \log_a(x) + \log_a(y) \\ \log_a\left(\frac{1}{x}\right) &= -\log_a(x) \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y) \end{aligned}\right\} \quad x, y \text{ des nombres positifs}$$

$$\log_a(x^r) = r\cdot\log_a(x) \qquad \begin{array}{l} x \text{ un nombre positif} \\ r \text{ un nombre quelconque} \end{array}$$

Remarque: $\ln(x) \equiv \log_e(x)$, $e = 2.718281828\ldots$

Challenge du jour

$$\log_a(\sqrt{5}) = \log_a(5^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\log_a(5) \neq (\log_a(5))^{\frac{1}{2}}.$$

en général !, mais on a égalité pour $a=$?

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

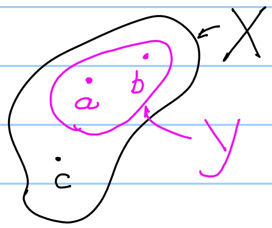
Chapitre 0

Notions de base

0.1. Ensembles

0.1.1 Notations

vidéo A



$X = \{a, b, c\}$

$y = \{x \in X : \text{couleur}(x) = \text{magenta}\}$

$\in$	est élément de	$a \in y$
$\notin$	n'est pas élément de	$c \notin y$
$\subset$	est un sous-ensemble de	$y \subset X$
$\not\subset$	n'est pas sous-ensemble de	$X \not\subset y$
$=$	est le même ensemble que	$y = y$
$\neq$	n'est pas le même ensemble que	$X \neq y$

$\phi = \{\ \}$ ensemble vide, ensemble sans éléments

Nota bene: $\phi \subset X$ pour tout ensemble X

$X \subset X$ pour tout ensemble X

Definition: $\mathcal{P}(X) :=$ l'ensemble dont les éléments sont tous les sous-ensembles de X

Exemple: $X = \{a, b, c\}$ 3 éléments

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}$$

$\mathcal{P}(X)$ contient $8 = 2^3$ éléments.

Remarques:
- $\{a,b\} = \{b,a\}$ l'ordre est irrelevant
- $\{a\} \subset X$, $\{a\} \in \mathcal{P}(X)$
- $\{a\} \neq \{\{a\}\}$

vidéo B

0.1.2 Le produit cartésien

X, Y, Z des ensembles.

un "couple", l'ordre est important !

$$\underbrace{X \times Y}_{\text{"produit cartésien"}} := \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Exemple: $X = \{1,2\}$, $Y = \{3,4\}$, $Z = \{5\}$.

$$X \times Y = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}.$$

Attention: $X \times Y \neq Y \times X$ en général

Définition plus générale: (exemple, 3 ensembles)

$$X \times Y \times Z := \{(x,y,z) : x \in X, y \in Y, z \in Z\}$$

$$= \{(1,3,5), (1,4,5), (2,3,5), (2,4,5)\}.$$

Attention: $X \times Y \times Z \neq (X \times Y) \times Z \neq X \times (Y \times Z)$

voir série 0, échauffement

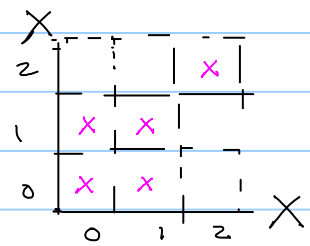
Définition: soient X et Y des ensembles. Un sous-ensemble $R \subset X \times Y$ est appelé <u>une relation binaire</u> sur X et Y.

Définition: soit X un ensemble. Un sous-ensemble $R \subset X \times X$ est appelé <u>une relation</u> (ou une relation binaire) sur X.

Exemple 0.1.2. Soit, à titre d'exemple, $X = \{0, 1, 2\}$ et

$$R = \{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (1,0)\} \subset X \times X.$$

Graphiquement:



Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

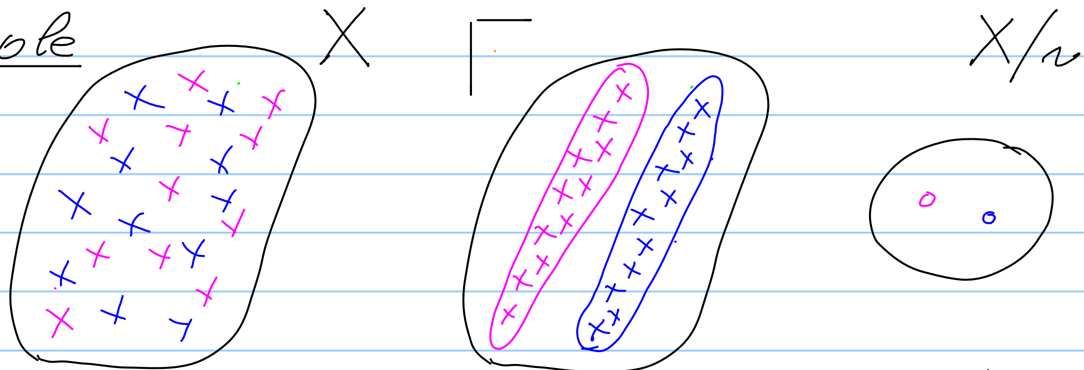
Chapitre 0

Notions de base

0.2 Classes d'équivalence (voir série 0)

Souvent il est utile de décomposer un ensemble X en classes d'équivalence.

Exemple



Les 22 joueurs sur un terrain de foot — image mentale — les deux équipes = "ensemble quotient"

Définition: soit X un ensemble. Un sous-ensemble $R \subset X \times X$ est appelé une relation d'équivalence sur X (et on utilise la notation $x \sim y$ pour dire que $(x,y) \in R$) si:

$\sim$ ≡ est équivalent à

R1) $\forall x \in X$, $x \sim x$ (R est réflexive)
R2) $\forall x, y \in X$, $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (R est symétrique)
R3) $\forall x, y, z \in X$, $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (R est transitive)

$\forall$ ≡ pour tout
$\Rightarrow$ ≡ implique
$\wedge$ ≡ "et" logique

voir série -1, partie IV

exemple introduit dans le chapitre 0.1.2

Exemple 0.1.2 $X = \{0, 1, 2\}$

$R = \{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (1,0)\} \subset X \times X$

(le montrer !) satisfait R1), R2) et R3).

Construction de l'ensemble quotient $X/\sim$

Definition: Donné $x \in X$ on définit $C_x \subset X$ par

$$C_x := \{y \in X : y \sim x\}.$$

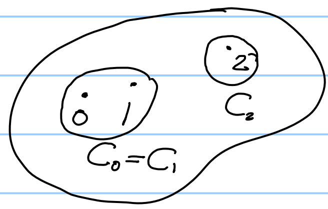
C_x est appelé la classe d'équivalence de x.

Remarque: $C_x = C_y$ si $x \sim y$. (pourquoi ?)

Exemple 0.1.2 $C_0 = C_1 = \{0,1\}$, $C_2 = \{2\}$

Definition: l'ensemble quotient $X/\sim$ est l'ensemble des classes d'équivalence distinctes de X.

Exemple 0.1.2 $X/\sim \; = \{\{0,1\}, \{2\}\}$



Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

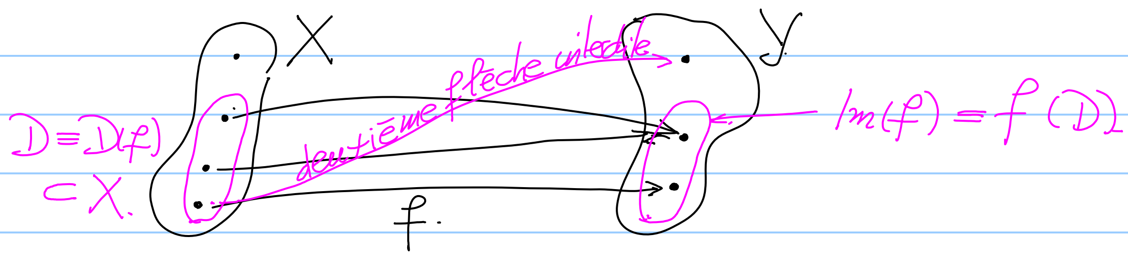
Chapitre 0

Notions de base

0.3 Fonctions, concepts de base

vidéo A

0.3.1 Définitions et notations



<u>Remarque:</u> f est spécifiée par un sous-ensemble de $D \times Y$ d'un certain type (voir plus loin).

<u>Domaine de définition de f</u> $\subset X$

$D \equiv D_f \equiv D(f) := \{x \in X$: une flèche et une seule va de $x \in X$ vers un $y \in Y\}$

<u>Notation:</u>

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

toujours le domaine def

<u>Image de f</u> $\subset Y$

$Im(f) \equiv f(D) := \{y \in Y : y = f(x)$ pour un $x \in D\}$

<u>Définition</u> Une fonction $f : D \rightarrow Y$ est appelée

- <u>surjective</u> si $Im(f) = Y$
- <u>injective</u> si $\overbrace{f(x_1) = f(x_2)}^{A} \Longrightarrow \overbrace{x_1 = x_2}^{B}$

vidéo B

Remarque: $(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

proposition — "est équivalent" — la proposition contraposée

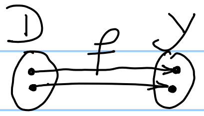
$\neg$ = non, A vrai $\Leftrightarrow$ $\neg A$ faux

voir série - 1, partie IV

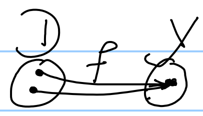
Donc: $(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2) \Leftrightarrow (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$

0.3.2. Discussion de la surjectivité

- si $f: D \to Y$ est surjective, alors tout $y \in Y$ est image d'au moins un $x \in D$.

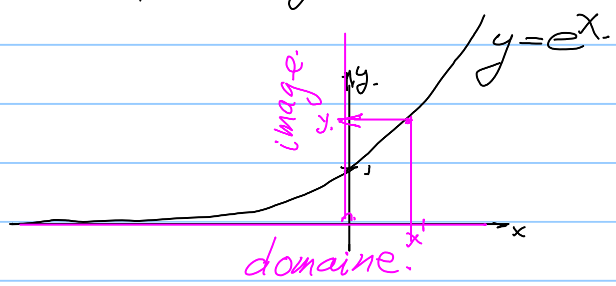


f est surjective
f est injective



f est surjective
f n'est pas injective

$$\begin{array}{ccccc} & D & & Y \\ f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = e^x \end{array}$$



$D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$.

f est injective mais f n'est pas surjective

Remarque: toute fonction $f: D \to Y$ définit une fonction surjective $f: D \to Im(f) \subset Y$.

$$\begin{array}{ccccc} & D & & Y \\ f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \{y \in \mathbb{R} : y > 0\} \\ & x & \longmapsto & y = e^x \end{array}$$

est une fonction injective et surjective.

vidéo C

0.3.3 Fonctions bijectives

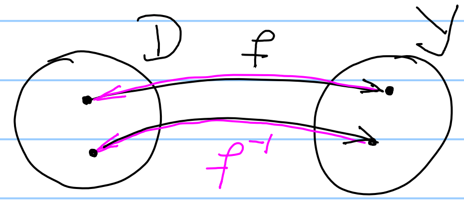
Définition: une fonction qui est injective et surjective est appelée bijective.

Remarque: toute fonction $f: D \longrightarrow Y$ qui est injective définit une fonction bijective $f: D \longrightarrow Im(f) \subset Y$.

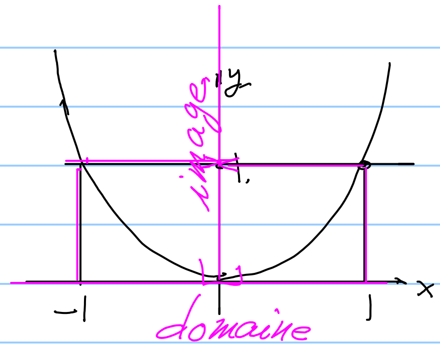
Remarque: toute fonction bijective $f: D \longrightarrow Y$ possède une fonction réciproque notée $f^{-1}: Y \longrightarrow D$. Elle associe à $y \in Y$ l'unique $x \in D$ tel que $f(x) = y$, et on a:

$$\forall y \in Y \quad f(f^{-1}(y)) = y$$

$$\forall x \in D \quad f^{-1}(f(x)) = x$$



Exemple



- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto y = x^2$

$D(f) = \mathbb{R}$ $\qquad$ f n'est pas surjective (car $f(x) \geq 0$)
$\qquad$ f n'est pas injective (car $f(-1) = f(1)$)

mais

- $g: \mathbb{R} \longrightarrow \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} = Im(f)$
  $x \longmapsto y = x^2$

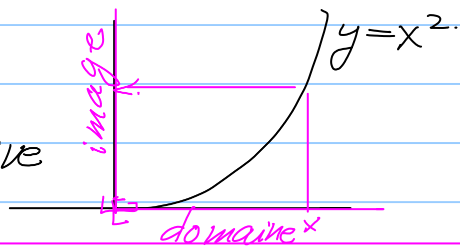
$D(g) = \mathbb{R}$ $\qquad$ g est surjective
$\qquad$ g n'est pas injective

et pour

- $D(h) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \subset D(g) = D(f) = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} h : D(h) &\longrightarrow \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} \\ x &\longmapsto y = x^2. \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} h \text{ est surjective} \\ h \text{ est injective} \end{array}\right\} = \text{bijective}$$



__Résumé__ :

- pour rendre une fonction $f : D \longrightarrow Y$ surjective il faut réduire Y à $f(D) = \operatorname{Im}(f) \subset Y$.

- pour rendre une fonction $f : D \longrightarrow Y$ injective il faut réduire le domaine de définition d'une manière adéquate.

- toute fonction $f : D \longrightarrow Y$ qui est bijective possède une fonction réciproque $f^{-1} : Y \longrightarrow D$.

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers la vidéo C	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 0

Notions de base

vidéo A

0.4 Fonctions, concepts additionnels

0.4.1. Restriction, prolongement et graphe d'une fonction

Restriction et prolongement d'une fonction

Soient deux fonctions $f: D \longrightarrow Y$ et $g: E \longrightarrow Y$ avec $E \subset D$ telles que pour tout $x \in E$, $g(x) = f(x)$. Alors :

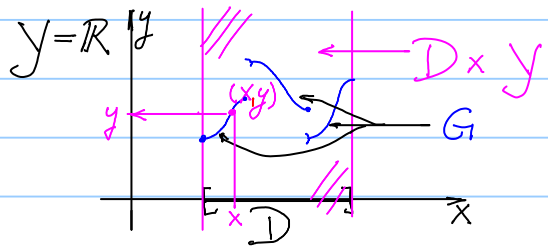
- g est appelée la restriction de f à E : $g = f\big|_E$.
- f est appelée un prolongement de g de E à D.

Le graphe d'une fonction

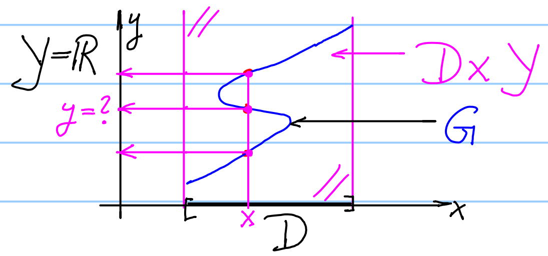
<u>Definition</u> le graphe (ou graphique) d'une fonction $f: D \longrightarrow Y$ est l'ensemble

$$G \equiv G_f \equiv G(f) := \{(x,y) \in D \times Y : y = f(x)\} \subset D \times Y$$

<u>Definition d'une fonction par son graphe</u> :
Soit $G \subset D \times Y$ (= une relation binaire) telle que pour tout $x \in D$ il existe un y <u>et un seul</u> tel que $(x,y) \in G$. Alors G est le graphe d'une fonction $f: D \longrightarrow Y$, qui, pour $(x,y) \in G$, associe y à x.



l'ensemble G est le graphe d'une fonction $f: D \longrightarrow Y$

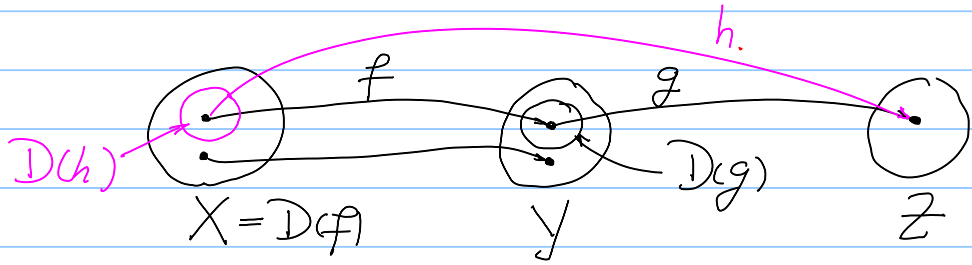


l'ensemble G n'est pas le graphe d'une fonction.

Remarque: la relation R définie dans Exemple 0.1.2 n'est pas le graphe d'une fonction $f: X \to X$ (le vérifier !).

vidéo B

0.4.2 Composition de fonctions



Soit $D(h) = \{ x \in D(f) : y = f(x) \in D(g) \} \subset D(f)$.

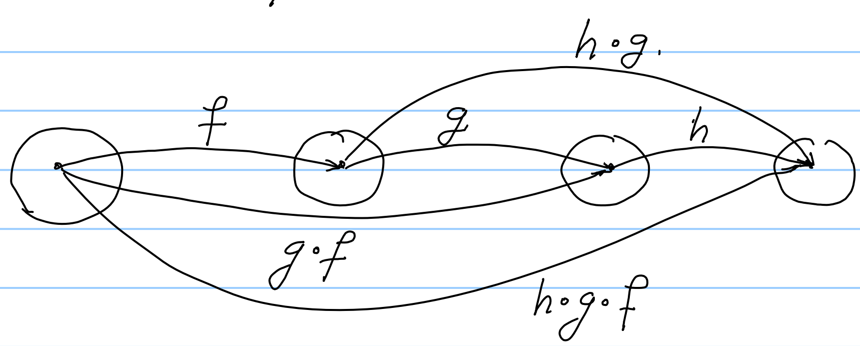
Alors, on peut définir la fonction $h: D(h) \to Z$ par

$$h(x) := g(f(x)).$$

= "rond"

Notation on écrit $h = g \circ f$ pour la fonction définie ainsi, et on dit que h est la composition de g avec f.

Compositions multiples



Manifestement on a :

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f$$

c'est-à-dire la loi de la composition de fonctions est associative.

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 0

Notions de base

vidéo A

0.5 Les entiers (les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$)

0.5.1. Propriétés de base

Les entiers naturels $\mathbb{N}$ $\quad \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$

Nota bene : 0 est un entier naturel, 0 est pair.

Relation d'ordre (total) sur $\mathbb{N}$, notée $\leq$

Pour tout $x, y, z \in \mathbb{N}$

O1) $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

O2) $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$

O3) on a soit $x \leq y$ soit $y \leq x$ (ordre total)

Exemples : $2 \leq 2$, $2 \leq 3$.

Notation : on écrit $x < y$ si $x \leq y$ et $x \neq y$

$x \geq y$ si $y \leq x$

$x > y$ si $y < x$

opérations : "+" : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$(m, n) \longmapsto m + n$.

"·" : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$(m, n) \longmapsto m \cdot n$.

éléments neutres : 0 pour "+" : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n + 0 = n$

1 pour "·" : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \cdot 1 = n$

On a pas des éléments "inverses" pour "+" et "·" (voir la suite).

<u>Les entiers (relatifs) $\mathbb{Z}$</u> : $\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$.
$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

<u>Eléments "inverses" pour "+"</u>

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $x + y = 0$

élément neutre pour "+"

<u>Exemples</u> $n + (-n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

la définition de $(-n)$.

$0 + 0 = 0$, donc $-0 = 0$

<u>Notation</u> : on écrit $2-3$ au lieu de $2+(-3)$

<u>Remarque</u>: $-(-3) = 3$

<u>Remarque</u>: On a les propriétés O1) – O3) pour $\mathbb{Z}$.

<u>Compatibilité de "+" et "·" avec $\leq$</u>

Pour tout $x, y, z \in \mathbb{N}$ ou $x, y, z \in \mathbb{Z}$ on a :

O4) si $x \leq y$, alors $x + z \leq y + z$
O5) si $0 \leq x$ et $0 \leq y$ alors $0 \leq x \cdot y$

vidéo B

<u>0.5.2. Le plus grand commun diviseur (pgcd)</u>

Algorithme d'Euclide, algorithme de Joseph Stein

<u>Remarque de base</u>: Soit $a, b \in \mathbb{N}$, $0 \leq b \leq a$. Si $r \in \mathbb{N}^*$ divise a et b, alors r divise $a - b$.

Démonstration $\underbrace{\frac{a}{r}}_{\in \mathbb{N}} = \underbrace{\frac{b}{r}}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\frac{a-b}{r}}_{\in \mathbb{N}}$ $\Rightarrow$

$\uparrow$ r divise a, $\uparrow$ r divise b $\Rightarrow$ r divise a−b.

Algorithme de J. Stein

0) $\operatorname{pgcd}(a,b) = \operatorname{pgcd}(b,a)$

1) $\operatorname{pgcd}(a,b) = 2\cdot \operatorname{pgcd}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ si a, b pairs

2) $\operatorname{pgcd}(a,b) = \operatorname{pgcd}\left(\frac{a}{2}, b\right)$ si a pair, b impair

3) $\operatorname{pgcd}(a,b) = \operatorname{pgcd}\left(\frac{a-b}{2}, b\right)$ si a, b impairs et $a \geq b$.

4) $\operatorname{pgcd}(a,0) = a$.

Exemple: $\operatorname{pgcd}(727,7) \underset{3)}{=} \operatorname{pgcd}(360,7) \underset{2)}{=} \operatorname{pgcd}(180,7) =$

$\underset{2)}{=} \operatorname{pgcd}(90,7) \underset{2)}{=} \operatorname{pgcd}(45,7) \underset{3)}{=} \operatorname{pgcd}(19,7) =$

$\underset{3)}{=} \operatorname{pgcd}(6,7) \underset{2)}{=} \operatorname{pgcd}(3,7) \underset{0)}{=} \operatorname{pgcd}(7,3) =$

$\underset{3)}{=} \operatorname{pgcd}(2,3) \underset{2)}{=} \operatorname{pgcd}(1,3) \underset{0)}{=} \operatorname{pgcd}(3,1) =$

$\underset{3)}{=} \operatorname{pgcd}(1,1) \underset{3)}{=} \operatorname{pgcd}(0,1) \underset{0)}{=} \operatorname{pgcd}(1,0) \underset{4)}{=} 1$.

vidéo C

0.5.3 Raisonnement par récurrence (principe d'induction)

Exemple: on aimerait démontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$

$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$: $P(n) \equiv$ "proposition n"

Théorème i) si $P(n_0)$ est vrai pour un $n_0 \in \mathbb{N}$
(initialisation)

ii) si pour tout $n \geq n_0$ $\quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$
(le pas d'induction)

alors $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$.

Dans notre exemple.

i) $n_0 = 1$: $1 = 1^2$ est vrai.

ii) $1+3+5+\dots+\underbrace{(2(n+1)-1)}_{=(2n+1)} = (n+1)^2$: $P(n+1)$

$\Leftrightarrow \underbrace{1+3+5+\dots+(2n-1)}_{=_{P(n)}\, n^2} + (2n+1) \overset{?}{=} (n+1)^2$ est-ce que c'est égal à

est égal en utilisant $P(n)$

$\Leftrightarrow n^2 + (2n+1) \overset{?}{=} (n+1)^2$ est vrai.

Donc, pour tout $n \geq n_0 = 1$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

i) + ii) pour tout $n \geq n_0 = 1$ $P(n)$ est vrai.

0.5.4 Contre-exemple (au "théorème" sans i))

vidéo D

Attention! i) est indispensable !

$P(n)$: $3^{2n+4} - 2^n$ est un multiple de 7

ii) $P(n+1)$: $3^{2(n+1)+4} - 2^{n+1}$ est un multiple de 7.

$+0 = -9\cdot 2^n + 9 \cdot 2^n$

$$\Leftrightarrow 9\cdot\underbrace{(3^{2n+4}-2^n)}_{\substack{\text{est un multiple de 7}\\ \text{par } P(n)}} + 2^n\underbrace{(9-2)}_{\substack{\text{un multiple}\\ \text{de } 7}} \Bigg\} \text{ un multiple de 7}$$

Donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout $n \geq 1$.

Mais i) : $P(1)$: $3^6 - 2 = 729 - 2 = 727$

astuce de calcul $\quad 3^6 = (3^3)^2 = 27^2 = 30\cdot 24 + 3^2 = 729$

$a^2 = (a+b)(a-b) + b^2$

Mais $\operatorname{pgcd}(727, 7) = 1$ donc 727 pas un multiple de 7.

Donc $P(1)$ n'est pas vrai, donc $P(n)$ n'est pas démontré !

$$\boxed{\text{Mais attention: il reste la possibilité logique que } P(n) \text{ soit vrai à partir d'un certain } n_0 > 1.}$$

En fait $P(n)$ est effectivement faux pour tout $n \geq 1$.
Ceci suit aussi de ii) (car $P(n+1) \Rightarrow P(n)$)
par une démonstration par l'absurde
(voir plus loin pour ce type de démonstrations)

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers la vidéo C	
Lien vers la vidéo D	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 0

Notions de base

0.6 Notations et identités

vidéo A

0.6.1 Les notations $\sum$ et $\prod$ (voir série 0)

a_k des nombres $k = m, \dots, n$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \geq m$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Exemples: $\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$, $\sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2$,

$$n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Définition (somme vide et produit vide)

si $n < m$: $\sum_{k=m}^{n} a_k := 0$, $\prod_{k=m}^{n} a_k := 1$.

Règles de calcul

Pour $l, m, n \in \mathbb{Z}$, $l \leq m \leq n$ et a_k, b_k des nombres:

$$\sum_{k=\ell}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=\ell}^{n} a_k$$

$$\left(\prod_{k=\ell}^{m} a_k\right)\cdot\left(\prod_{k=m+1}^{n} a_k\right) = \prod_{k=\ell}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$$

$$\prod_{k=m}^{n} (a_k \cdot b_k) = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)\cdot\left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right)$$

Vidéo B

0.6.2 Rappels (prérequis) de notations et identités

i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$, $a \neq 1$

Convention: $a^{0} := 1$ (zéro), pour tout nombre a

Démonstration de i): $(1-a)(1+a+\dots+a^n) = 1 \cancel{-a+a}\dots - a^{n+1}$

ii) $n! := 1\cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)\cdot n = (n-1)!\, n$, $n \in \mathbb{N}^*$ "n factoriel"

$0! := 1$

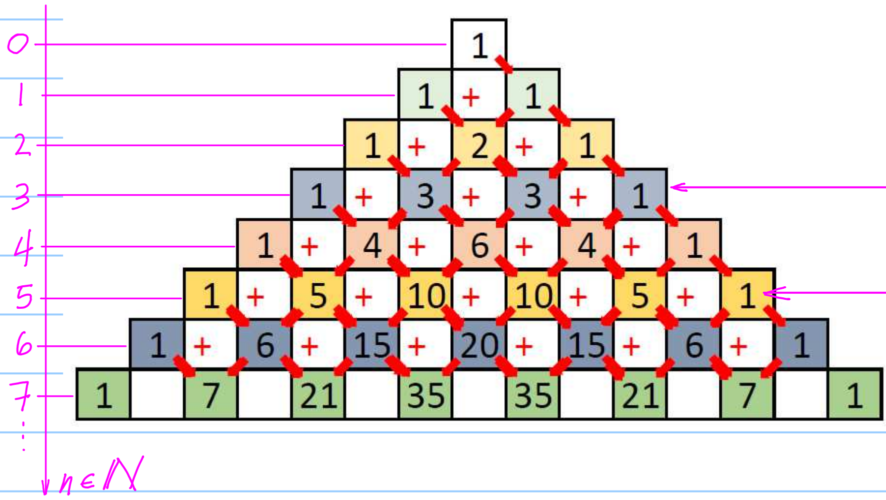
$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \overset{n\geq 1}{=} \frac{n\cdot(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \quad , \quad k, n \in \mathbb{N},\ k \leq n.$$

iii) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, a, b des nombres

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$(a+b)^{\overset{\in\mathbb{N}}{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + n a^{n-1} b + \dots + b^n$$

Remarque (triangle de Pascal)



$\binom{3}{0}, \binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3}$

$\binom{5}{0}, \binom{5}{1}, \binom{5}{2}, \binom{5}{3}, \binom{5}{4}, \binom{5}{5}$

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 0

Notions de base

vidéo A

0.7 Les nombres rationnels, concepts de base

0.7.1 Opérations algébriques

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^* \right\} \qquad (= \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)$$

"+" : $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}.$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + b\cdot c}{b\cdot d}.$$

"·" : $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Sur $\mathbb{Q}$ on a une relation d'équivalence

$$\boxed{\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \quad \text{si} \quad a\cdot d = b\cdot c}$$

vérifier que ceci définit bien une relation d'équivalence

Exemple $\frac{1}{2} \sim \frac{2}{4}$ car $1\cdot 4 = 2\cdot 2$.

Notation on écrit $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ au lieu de $\frac{1}{2} \sim \frac{2}{4}$

On devrait donc définir : $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim$ pour être précis et nous allons adopter ce point de vue à partir de maintenant.

Important : "+" et "·" sont compatibles avec la relation d'équivalence (vérifier !), c'est-à-dire

si $\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} \sim \frac{c'}{d'}$

alors $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \sim \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \sim \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}$

Remarques

- Le représentant privilégié d'un nombre $x \in \mathbb{Q}$ est $\frac{p}{q}$ avec $q > 0$ et $\operatorname{pgcd}(|p|, q) = 1$.
- Soit $x = \frac{a}{1}$, $y = \frac{b}{1}$ alors $x + y = \frac{a+b}{1}$, $x \cdot y = \frac{a \cdot b}{1}$

  et on récupère donc les opérations de $\mathbb{Z}$ si on identifie $\frac{p}{1} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et ainsi $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

vidéo B

07.2 Opérations inverses

"inverse" pour $+$: pour $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ on définit

$$-x \in \mathbb{Q} \text{ par : } -x := \frac{-p}{q} \quad \left(\sim \frac{p}{-q}\right)$$

et on a $x + (-x) = 0 \quad \left(= \frac{0}{1} \sim \frac{0}{q}, q \in \mathbb{Z}^*\right)$

inverse pour $\cdot$: soit $\boxed{x = \frac{p}{q}} \in \mathbb{Q}$ avec $p \neq 0$,

alors $\boxed{y = \frac{q}{p}} \in \mathbb{Q}$ est bien défini et on a

$$x \cdot y = \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{p \cdot q}{q \cdot p} \underset{\text{équivalence}}{=} \frac{1}{1} = 1$$

identification de $\frac{1}{1} \in \mathbb{Q}$ avec $1 \in \mathbb{Z}$.

Pour $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $y = \frac{q}{p}$ est donc l'inverse de x.

<u>Notations pour l'inverse:</u> soit $x \in \mathbb{Q}^*$, alors on note son inverse par: $\boxed{x^{-1} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{x}}$

<u>Exemple:</u> $x = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

car $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 2} = \frac{6}{6} = \frac{1}{1} = 1.$

<u>Attention !</u> (☺, trouver l'erreur !)

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{\frac{2}{2}} = \frac{1}{\frac{2}{2}} = \begin{array}{c}1\\ \hline 2\\ \hline 2\end{array} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 1

Les nombres réels $\mathbb{R}$

vidéo A

1.1 Les nombres rationnels, propriétés

1.1.1 $\mathbb{Q}$ est un corps

Proposition: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ est un corps, c'est-à-dire :

"$\mathbb{Q}$ muni des opérations $\oplus$ et $\odot$"

$\forall\, x, y, z \in \mathbb{Q}$

$\oplus$

$x + (y+z) = (x+y) + z$ — associative

$x + y = y + x$ — commutative

$0 + x = x$ — $\exists$ élément neutre

zéro $\in \mathbb{Q}$

$(-x) + x = 0$ — $\exists$ élément "inverse"

$\odot$

$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ — associative

$x \cdot y = y \cdot x$ — commutative

$1 \cdot x = x$ — $\exists$ élément neutre

un $\in \mathbb{Q}$

pour $x \neq 0$ $\quad (x^{-1}) \cdot x = 1$ — $\exists$ élément inverse

$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ — distributivité de l'opération $\cdot$ sur le $+$.

$\mathbb{Q}$ est un corps ordonné (il existe "$\leq$" avec O1 – O5)

Pour ordonner $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$ (choisir $b, d > 0$)

on utilise les représentants $x = \frac{ad}{bd}$, $y = \frac{b \cdot c}{b \cdot d}$,

(même "dénominateur") puis on compare les numérateurs c'est-à-dire on définit :

Définition soit $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, avec $b, d > 0$

alors $\boxed{\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} \quad \text{si} \quad ad \leqslant bc}$

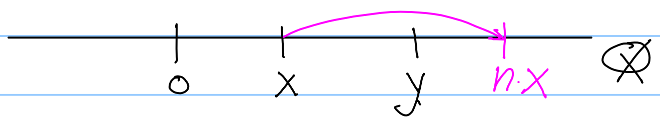
Remarques:
- $\leqslant$ est compatible avec $\sim$ sur $\mathbb{Q}$.
- $\leqslant$ définit une relation d'ordre total
  (vérifier O1 — O3 !, voir Section 0.5)
- $\leqslant$ est compatible avec les opérations $+, \cdot$
  (vérifier O4, O5 !, voir Section 0.5)

vidéo B

1.1.2. Propriété importante de $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ est (un corps) archimédien (satisfait l'axiom d'archimède), c'est-à-dire:

Proposition: pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$, $x > 0$, $y \geqslant 0$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \cdot x > y$.



Démonstration (construction de n, raisonnement déductif, si A est vrai et $A \Rightarrow B$, alors B est vrai)

- si $x > y$ on a avec $n=1$: $nx = 1 \cdot x = x > y$

- si $y \geqslant x > 0$ alors on peut écrire $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, c.-à-d. $a, b, c, d \geqslant 1$.

  Par définition de $\leqslant$: $n \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Longleftrightarrow n(ad) > (bc)$

  Puisque $a, d \geqslant 1 \Rightarrow a \cdot d \geqslant 1$ et donc, avec $n = (bc)+1$ on a $n \cdot (ad) \geqslant n = (bc)+1 > (bc)$ ▨

fin de la démonstration

vidéo C

1.1.3 Proposition (soit $x \in \mathbb{Q}$, alors $x^2 \neq 2$.)

Démonstration (raisonnement par l'absurde, si B est vrai et $A \Rightarrow \neg B$, alors $\neg A$ est vrai)

Soit $x \in \mathbb{Q}$. Supposons que $\underbrace{x^2 = 2}_{A}$

On a $x = \frac{p}{q}$ et on peut choisir $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{\mathrm{pgcd}(p,q) = 1}_{B}$

$$\underbrace{x^2 = 2}_{A} = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow \boxed{p^2 = 2 \cdot q^2}$$

Donc p^2 est pair, donc p est pair $\Rightarrow p = 2 \cdot a$, $a \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow (2 \cdot a)^2 = 2q^2 \Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot a^2 = 2 \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = 2a^2.$$

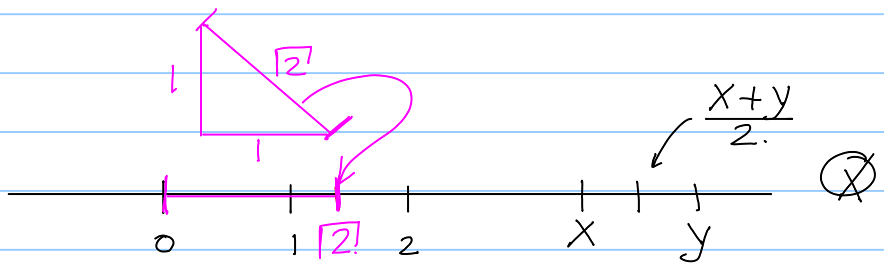
Donc q^2 est pair, donc q est pair $\Rightarrow q = 2 \cdot b$, $b \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow \mathrm{pgcd}(p,q) = \mathrm{pgcd}(2a, 2b) = 2 \cdot \mathrm{pgcd}(a,b) \underbrace{\neq 1}_{\neg B}.$$

$\times$ $\underbrace{\mathrm{pgcd}(p,q) = 1}_{B}$. Donc $\underbrace{x^2 \neq 2}_{\neg A}$ (est vrai).

"en contradiction avec" ▨

Conclusion: l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.



Si $x, y \in \mathbb{Q}$, alors $\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in \mathbb{Q}$. On peut construire dans $\mathbb{Q}$ des nombres arbitrairement proche de $\sqrt{2}$ (voir plus loin dans le cours), mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers la vidéo C	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 1

Les nombres réels $\mathbb{R}$

$\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \ldots \quad , e, \pi \notin \mathbb{Q}$

1.2 Introduction axiomatique de $\mathbb{R}$

On demande de l'ensemble $\mathbb{R}$ la même structure algébrique que pour $\mathbb{Q}$:

1) $\mathbb{R}$ est un corps

2) $\mathbb{R}$ est pourvu d'une relation d'ordre total, compatible avec les opérations $+, \cdot$.

Puis on demande de plus :

3) $\mathbb{R}$ a la propriété de la borne inférieure.

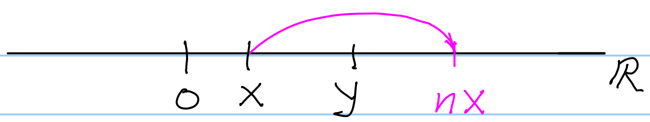
c'est-à-dire "tout sous-ensemble non-vide minoré de $\mathbb{R}$ admet (dans $\mathbb{R}$) un plus grand minorant.

à définir

Remarque 3) $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}$ a la propriété de la borne supérieure
3) $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}$ a la propriété de complétude

1) + 2) + 3) $\mathbb{R}$ est un corps ordonné complet

Important 3) $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ est archimédien, c'est-à-dire



$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0, y \in \mathbb{R}, y \geq 0$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ t.q. $nx > y$.

Remarque: l'axiome d'Archimède est équivalent à dire que pour tout $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $r < n$. (le montrer !)

Remarque: l'axiome d'Archimède implique que si $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq a \leq \frac{1}{n}$ alors $a = 0$.
(le montrer !)

Remarque: d'une manière équivalente, si $a \in \mathbb{R}$ est tel que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ on a $0 \leq a < \varepsilon$, alors $a = 0$ (le montrer !)

Remarques: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ les nombres irrationnels

Définition: droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \underbrace{+\infty}_{\equiv\,\infty}\}$

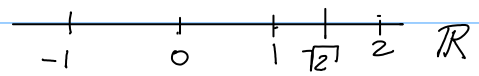
Propriétés:

$$-\infty < +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty < x < +\infty$$

Existence de $\mathbb{R}$ (modèles pour $\mathbb{R}$)

1) la droite numérique.



2) l'ensemble des nombres à virgule

$$r = a.a_1 a_2 a_3 \ldots \quad \text{avec } a \in \mathbb{Z}$$
$$a_1, a_2, \ldots \in \{0, \ldots, 9\}$$

avec $0.999\ldots \sim 1.000\ldots$ etc. (équivalence).

3) des classes d'équivalence de suites de Cauchy de nombres rationnels.
à définir

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 1

Les nombres réels $\mathbb{R}$

1.3. Infimum

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$,

<u>minimum</u>: s'il existe $m \in A$ tel que $\forall x \in A$, $x \geq m$, on dit que m est <u>le</u> minimum de A.

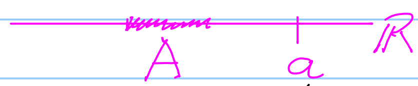
<u>maximum</u>: s'il existe $M \in A$ tel que $\forall x \in A$, $x \leq M$ on dit que M est <u>le</u> maximum de A.

<u>Exemple</u>: l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ n'admet ni minimum ni maximum

<u>Remarque</u>: s'ils existent, le minimum et le maximum sont uniques.

<u>minorant</u> $a \in \mathbb{R}$ est un minorant de $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, si $\forall x \in A$, $a \leq x$.

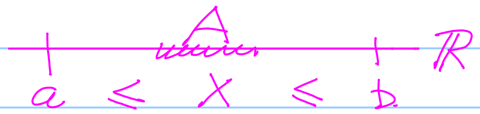
<u>majorant</u> $a \in \mathbb{R}$ est un majorant de $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, si $\forall x \in A$, $x \leq a$.



<u>minoré</u>: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ est minoré, si A admet un minorant.

<u>majoré</u>: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ est majoré, si A admet un majorant.

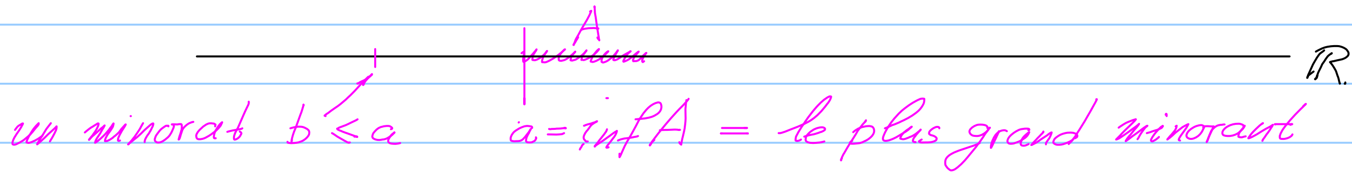
borné: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ est borné si A est minoré **et** majoré.



Infimum: un minorant $a \in \mathbb{R}$ de $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ est appelé infimum ou borne inférieure de A,

$$a = \inf A$$

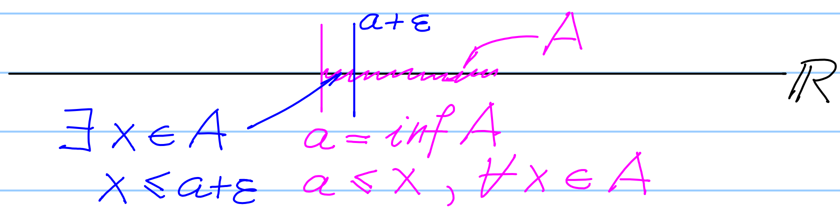
si a est le plus grand minorant de A c'est-à-dire si tout minorant b de A satisfait $b \leq a$.



Autrement dit: i) $\forall x \in A$ on a $\inf A \leq x$

ii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\exists\ x \in A$ tel que $x \leq \inf A + \varepsilon$.

le montrer !



Remarque: $\inf A$ (pour $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A minoré) existe par définition de $\mathbb{R}$, c'est l'axiome 3)

Remarque: la condition i) signifie que $\inf A$ est un minorant de A

<u>Remarque:</u> la condition ii) signifie que $\inf A$ est le maximum de l'ensemble des minorants de A :

$$\inf A = \text{maximum}\{a \in \mathbb{R} : a \text{ un minorant de } A\}$$

le montrer !

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 1

Les nombres réels $\mathbb{R}$

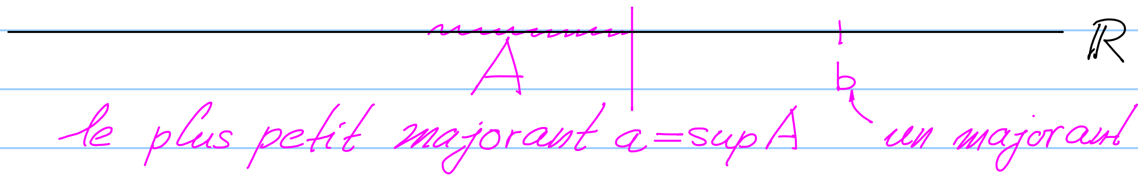
1.4. Supremum

D'une manière équivalente

Supremum: un majorant $a \in \mathbb{R}$ de $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ est appelé supremum ou borne supérieure de A

$$a = \sup A$$

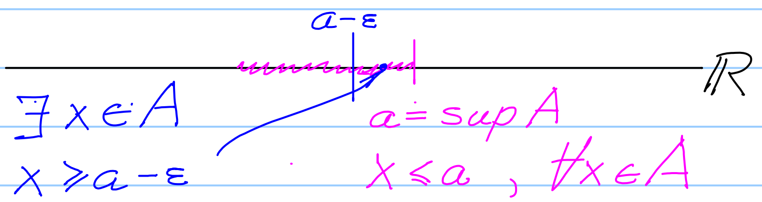
si a est le plus petit majorant de A, c'est-à-dire si tout majorant b de A satisfait $b \geq a$.



Autrement dit: i) $\forall x \in A$ on a $x \leq \sup A$

ii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists x \in A$ tel que $\sup A - \varepsilon \leq x$.

le montrer!

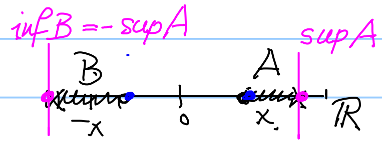


Remarque: i) dit que $\sup A$ est un majorant de A et ii) dit que $\sup A$ est le minimum de l'ensemble des majorants de A:

$$\sup A = \text{minimum}\{a \in \mathbb{R} : a \text{ un majorant de } A\}$$

Remarque : soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, et soit

$$B := \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\},$$



alors $\sup A = -\inf B$

Remarque : soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

minimum : si $\inf A \in A$, alors $\inf A = \text{minimum } A \equiv \min A$

maximum : si $\sup A \in A$, alors $\sup A = \text{maximum } A \equiv \max A$

Convention (abus de notation) : Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

- si A <u>n'est pas minoré</u> on écrit $\inf A = -\infty$ $(\notin \mathbb{R})$
- si A <u>n'est pas majoré</u> on écrit $\sup A = +\infty$ $(\notin \mathbb{R})$

Exemples (voir série 1)

1) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$, $\inf A = -\infty$, $\sup A = 1$

2) $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$, $\inf A = -\infty$, $\sup A = 1 = \max A$

3) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x,\ x^2 < 2\}$, $\inf A = 0 = \min A$

$\sup A =: \sqrt{2}$ (voir la section 1.5)

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 1

Les nombres réels $\mathbb{R}$

1.5. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Soit

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x,\ x^2 < 2\}$$

Proposition : $a := \sup A$ satisfait $a^2 = 2$ $\quad (a =: \sqrt{2})$

0) $1 \in A$ car $0 \leq 1$ et $1^2 = 1 < 2$.
$\Rightarrow a \geq 1$ (propriété i) du sup)

1) $\boxed{\text{supposons que } a^2 < 2}$: puisque $\mathbb{R}$ est archimédien

$\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \cdot \underbrace{\left(\frac{2-a^2}{2a+1}\right)}_{>0} > 1$

$\Leftrightarrow \underbrace{2 - a^2 > \frac{2a+1}{n}}_{(*)}$.

Avec ce n :

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2 = a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n \geq 1}{\leq} a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n} = a^2 + \frac{2a+1}{n} <$$

$$\underset{(*)}{<} a^2 + 2 - a^2 = 2.$$

Ceci montre que $x = a + \frac{1}{n} \in A$ car $x \geq 0$ ($a \geq 1$ par 0)) et $x^2 < 2$
ce qui est en contradiction avec $a = \sup A$
(propriété i) du sup). En conclusion $\boxed{a^2 \geq 2}$

2) $\boxed{\text{Supposons que } a^2 > 2.}$: puisque $\mathbb{R}$ est archimédien

$\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n.\underbrace{\left(\frac{a^2-2}{2a}\right)}_{>0} > 1$

$\Leftrightarrow a^2 - 2 > \frac{2a}{n} \Leftrightarrow \underbrace{a^2 - \frac{2a}{n} > 2}_{(*)}$.

Avec ce n :

Puisque $a - \frac{1}{n} < a$ il existe par la définition de $a = \sup A$ (propriété ii) du sup) un $x \in A$ tel que.

$$0 \underset{a \geq 1,\, n \geq 1}{\leq} a - \frac{1}{n} \underset{\text{propriété ii) du sup}}{\leq} x \qquad (**)$$

et on trouve

$$x^2 \overset{(**)}{\underset{0 \leq}{\geq}} x\left(a - \frac{1}{n}\right) \overset{(**)}{\underset{0 \leq}{\geq}} \left(a - \frac{1}{n}\right)^2 = a^2 - \frac{2a}{n} + \overset{>0}{\frac{1}{n^2}} > a^2 - \frac{2a}{n} \underset{(*)}{>} 2$$

Donc $x^2 > 2$ ce qui contredit $x \in A$.
En conclusion $\boxed{a^2 \leq 2}$

1) et 2) impliquent que $a^2 = 2$, car $a^2 \geq 2$ par 1) et $a^2 \leq 2$ par 2) et $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre total.

$\blacksquare$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 1

Les nombres réels $\mathbb{R}$

1.6 Sous-ensembles de $\mathbb{R}$

vidéo A

1.6.1. Intervalles

nombres à virgule "périodiques"

$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = les irrationnels

$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_+^* := \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$

$\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$, $\mathbb{R}_-^* := \mathbb{R}_- \setminus \{0\}$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$

intervalle ouvert : $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

intervalle fermé : $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Remarque pour le cas $a=b$: $]a, a[= \emptyset \subset \mathbb{R}$
$[a, a] = \{a\} \subset \mathbb{R}$.

autres intervalles : $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

intervalles ouverts non bornés

$]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < +\infty\}$

$]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < b\}$

$]-\infty, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$

intervalles fermés non bornés

$$[a,+\infty[\;:=\; \{x\in\mathbb{R} :\; a\leq x < +\infty\}$$

$$]-\infty\; b] \;:=\; \{x\in\mathbb{R} :\; -\infty < x \leq b\}$$

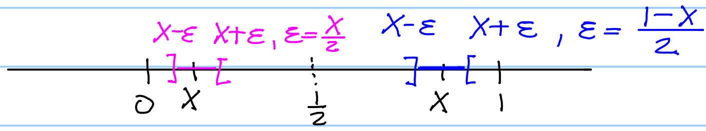
vidéo B

1.6.2. Ensembles ouverts et fermés

Définition: un ensemble $A\subset\mathbb{R}$ est appelé ouvert, si pour tout $x\in A$ il existe $\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, tel que $]x-\varepsilon\,,\,x+\varepsilon[\;\subset A$

Exemple: $A=]0,1[$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$.

Démonstration



1) cas $\frac{1}{2}\leq x<1$: choisir $\varepsilon=\frac{1-x}{2}$.

2) cas $0<x<\frac{1}{2}$: choisir $\varepsilon=\frac{x}{2}$.

Plus d'exemples

$]0,1[\;,\quad]-1,0[\,\cup\,]0,1[\;,\quad \mathbb{R}\,,\quad]a,+\infty[$

sont des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}$.

Définition: un ensemble $A\subset\mathbb{R}$ est appelé fermé si $\mathbb{R}\setminus A$ est un ensemble ouvert.

Exemples: $[0,0]\,,\ [0,1]\,,\ [0,1]\cup[2,3]\,,\ \emptyset\,,\ ]-\infty,a]$

sont des sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}$.

Remarque: pour être cohérent on doit aussi définir $\phi = \,]a,a[$ comme un ensemble ouvert et $\mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \phi$ comme fermé. ϕ et $\mathbb{R}$ sont les seuls sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui sont <u>à la fois</u> ouverts <u>et</u> fermés.

Remarque: $[0,1[$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $[0,1]\cap\mathbb{Q}$, sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui ne sont <u>ni</u> ouverts <u>ni</u> fermés

vidéo C

1.6.3. $\mathbb{Q}$ comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$

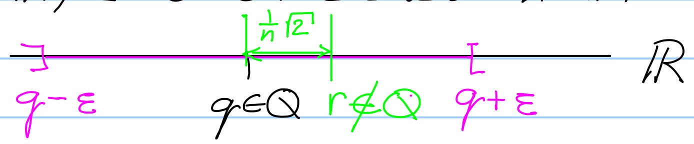
Explications (pour $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$)

On montre que ni $\mathbb{Q}$ ni $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ne sont ouverts.

<u>i) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ n'est pas ouvert</u>

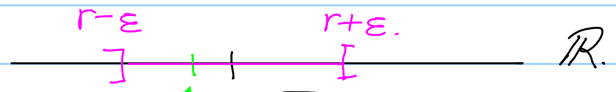
Donné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ on choisit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\varepsilon > \sqrt{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{n}\sqrt{2} < \varepsilon$



On a que $r = q + \frac{1}{n}\sqrt{2} \in \,]q-\varepsilon, q+\varepsilon[$. mais $r \notin \mathbb{Q}$ (voir serie 1). Donc $]q-\varepsilon, q+\varepsilon[\not\subset \mathbb{Q}$, donc $\mathbb{Q}$ n'est pas un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$.

<u>ii) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert</u> (voir les modèles pour $\mathbb{R}$)



$r = \sqrt{2} = 1.414\ldots \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (une suite infinie non périodique de décimales)

exemple

$\mathbb{Q} \ni q = 1.414\ldots$ un nombre suffisant mais fini de décimales de $\sqrt{2}$

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers la vidéo C	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 1

Les nombres réels $\mathbb{R}$

1.7. Valeur absolue

video A

1.7.1. Définition et propriétés

Définition: Pour $x \in \mathbb{R}$ on définit la (fonction) valeur absolue $|x|$ par

$$|x| \equiv \mathrm{abs}(x) := \begin{cases} x \,, & \text{si } x \geq 0 \\ -x \,, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propriétés de base

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ on a :

$$|x| = 0 \iff x = 0$$

$$|-x| = |x| \quad , \quad |x \cdot y| = |x||y|$$

$$|x| = \sqrt{x^2} \quad ! \quad (\text{avec } \sqrt{0^2} := 0)$$

$$|x| \leq |y| \iff x^2 \leq y^2$$

Inégalités triangulaires

$$|x \pm y| \leq |x| + |y|$$

$$|x \pm y| \geq \big|\, |x| - |y| \,\big|$$

Identités (voir aussi série 1)

$$|x+y| + |x-y| = |x| + |y| + \big||x| - |y|\big| = 2 \cdot \max\{|x|, |y|\}$$

$$\big||x+y| - |x-y|\big| = |x| + |y| - \big||x| - |y|\big| = 2 \cdot \min\{|x|, |y|\}$$

vidéo B

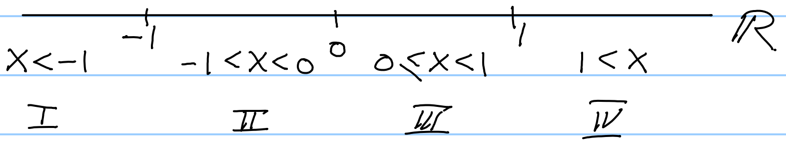
1.7.2. Inéquations (un exemple)

Soit l'ensemble

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R} : |x| \neq 1, \ \frac{1}{1-|x|} < 1 \right\}$$

Montrons que

$$A = \,]-\infty, -1[\ \cup\ ]1, +\infty[$$



I : $\dfrac{1}{1-|x|} = \dfrac{1}{\underbrace{1+x}_{<0}} < 1$ vrai

II : $\dfrac{1}{1-|x|} = \dfrac{1}{\underbrace{1+x}_{>0}} < 1 \iff 1 < 1+x \iff x > 0$ faux

III : $\dfrac{1}{1-|x|} = \dfrac{1}{\underbrace{1-x}_{>0}} < 1 \iff 1 < 1-x \iff x < 0$ faux

IV : $\dfrac{1}{1-|x|} = \dfrac{1}{\underbrace{1-x}_{<0}} < 1$ vrai

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 1

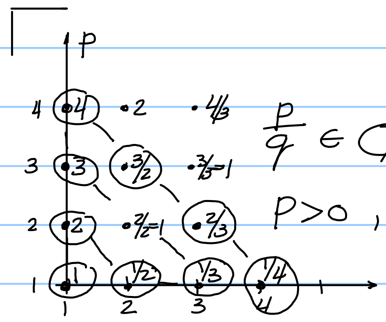
Les nombres réels $\mathbb{R}$

1.8. Propriétés additionnelles de $\mathbb{R}$

$\mathbb{Z}$:	....	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$\mathbb{N}^*$		7	5	3	1	2	4	6	...

$\mathbb{Z}$ est donc dénombrable (il existe une fonction bijective entre $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}$).

$\mathbb{Q}$ est dénombrable

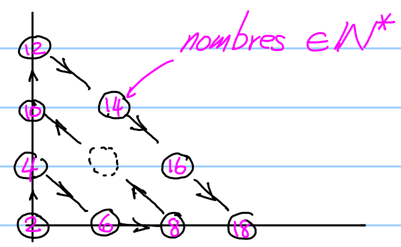


$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$

$p > 0,\ q > 0$

$0 \in \mathbb{Q} \longleftrightarrow 1 \in \mathbb{N}^*$

$\longleftrightarrow$



$1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 3, \ldots \quad \longleftrightarrow \quad 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10, \ldots$

même dessin pour $\frac{-p}{q} \in \mathbb{Q} \quad \longleftrightarrow \quad$ numérotation par $3, 5, \ldots$

Donc :

$\mathbb{Q}$	...	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-2	-1	0	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	3	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	...
$\mathbb{N}^*$	....	9	7	5	3	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	..

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (démonstration par l'absurde)

Nous montrons qu'il n'est déjà pas possible de numéroter les éléments de $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Supposons que $x_1, x_2, \ldots$ est une numérotation de tous les $x \in [0,1]$:

$x_1 = 0.\, x_{1,1}\ x_{1,2} \ldots$ liste de tous les $x \in [0,1]$

$x_2 = 0.\, x_{2,1}\ x_{2,2} \ldots$

$x_3 = 0.\, x_{3,1}\ x_{3,2}\ \ldots$ (ici $x_{i,j} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.)

$\vdots$

(toujours utiliser le représentant "avec les 9", donc $0.999\ldots (=1)$ $0.34999\ldots (=0.35)$, etc.).

Hélas, il manque dans cette liste le nombre

(les choisir $\neq 0$)

$$y = 0.y_1 y_2 \ldots \in [0,1], \quad \text{avec } y_i \neq x_{ii}, \; i=1,2,\ldots$$

en contradiction avec notre hypothèse. ▨

Illustration de la méthode (dite "diagonale")

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0.\,1\,2\,3\,4\,9\,8\ldots \\
x_2 &= 0.\,1\,3\,2\,1\,7\,6\ldots \\
x_3 &= 0.\,2\,3\,4\,5\,5\,4\ldots \\
x_4 &= 0.\,3\,1\,2\,4\,4\,3\ldots \\
x_5 &= 0.\,6\,1\,3\,7\,3\,2\ldots \\
x_6 &= 0.\,9\,2\,8\,9\,0\,1\ldots
\end{aligned}$$

$$y = 0.\underset{\neq 1}{2}\;\underset{\neq 3}{4}\;\underset{\neq 4}{5}\;\underset{\neq 4}{5}\;\underset{\neq 3}{4}\;\underset{\neq 1}{2}$$

$$\Longrightarrow$$

$$y \neq x_1, \; y \neq x_2, \; y \neq x_3 \ldots$$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 2

Introduction aux nombres complexes

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $x^2+1 \neq 0$.

2.1. Définition du corps des nombres complexes $\mathbb{C}$

Soit $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\quad (=: \mathbb{R}^2)$.

$(a,b), (c,d) \in X$

$\mathbb{C} := (X, +, \cdot) \longleftarrow$ sur X deux opérations $+$ et $\cdot$

$+ : \quad \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $\quad$ le plus dans $\mathbb{R}$

$(a,b)+(c,d) := (a+c, b+d)$

le $+$ dans $\mathbb{C}$

$\cdot : \quad \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$(a,b)\cdot(c,d) := (a\cdot c - b\cdot d, ad + bc)$

$\mathbb{C}$ est un corps (vérifier !), appelé corps des nombres complexes

$\mathbb{C}$ n'est pas ordonné.

Voir aussi 2.4

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 2

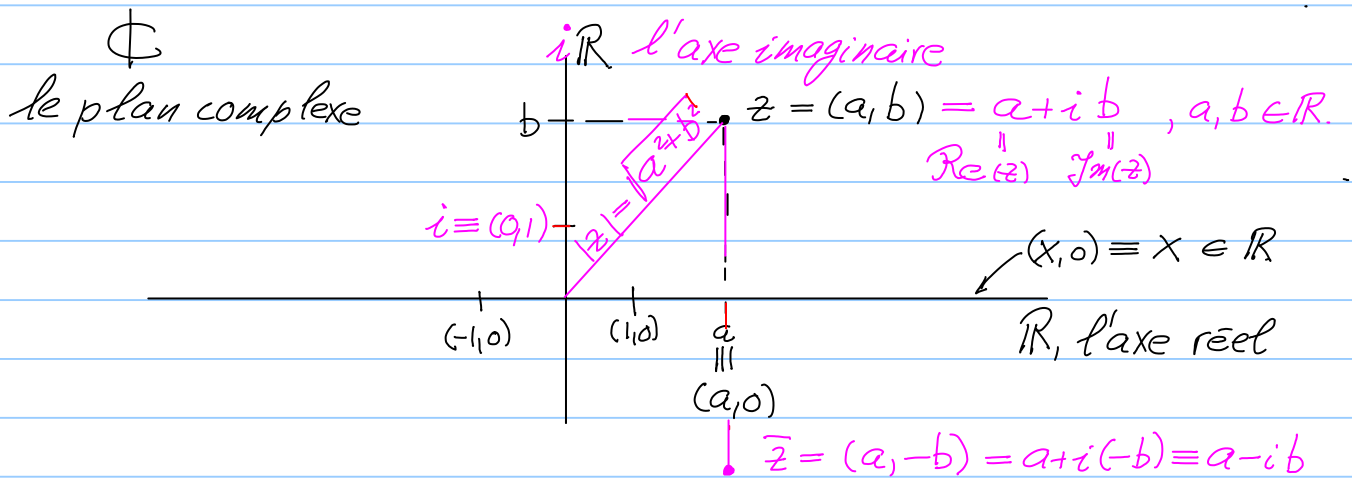
Introduction aux nombres complexes

2.2. Représentation cartésienne

On a $(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$ (zéro)

$(a,0)\cdot(b,0)=(a\cdot b-0\cdot 0,\ a\cdot 0+0\cdot b)=(a\cdot b,0)$

ce qui permet d'identifier $(x,0)\in\mathbb{C}$ avec $x\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.



On a $\underbrace{(0,1)}_{\equiv i}\cdot\underbrace{(0,1)}_{\equiv i}=(0\cdot 0-1\cdot 1,\ 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)\equiv -1$

<u>Notation:</u> $\boxed{(0,1)\equiv i}$ "unité imaginaire"

On a donc $i^2=-1$ ou encore $i^2+1=0$.

Pour tout $z=(a,b)\in\mathbb{C}$ on a l'égalité:

$$z=(a,b)=\underbrace{\underbrace{(1,0)}_{\equiv 1}\cdot\underbrace{(a,0)}_{\equiv a}}_{=(a,0)}+\underbrace{\underbrace{(0,1)}_{\equiv i}\cdot\underbrace{(b,0)}_{\equiv b}}_{=(0,b)}=1\cdot a+i\cdot b=a+ib.$$

On a donc:

$$\forall z=(a,b)\in\mathbb{C},\ a,b\in\mathbb{R},\quad \boxed{z=a+ib}$$

La forme ou la représentation cartésienne de $z\in\mathbb{C}$.

Soit $z_1 = a+ib$, $z_2 = c+id$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. En utilisant les règles de calcul "habituelles" plus $\boxed{i^2=-1}$ on trouve:

$$z_1 + z_2 = a+ib + c+id = (a+c) + i(b+d)$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a+ib)\cdot(c+id) = (a\cdot c - b\cdot d) + i(ad + b\cdot c)$$

et on retrouve les opérations + et $\cdot$ de la définition de $\mathbb{C}$.

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

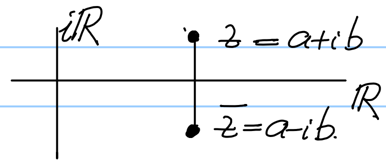
Chapitre 2

Introduction aux nombres complexes

2.3. Définitions additionnelles et propriétés élémentaires

Soit $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

<u>Le (complexe) conjugué de z</u> $\bar{z} := a - ib \equiv a + i(-b)$.



<u>Propriétés:</u> $\forall z \in \mathbb{C}$, $\bar{\bar{z}} = z$

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

<u>Partie réelle de $z = a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$:</u> $\mathrm{Re}(z) = a \in \mathbb{R}$

<u>Partie imaginaire de $z = a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$:</u> $\mathrm{Im}(z) = b \in \mathbb{R}$

<u>Remarque:</u> On a

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

vérifier !

Valeur absolue (ou module) de $z = a+ib$, $a,b \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{|z| := (z \cdot \bar{z})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}} \quad \left(= \sqrt{\bar{\bar{z}}\,\bar{z}} = |\bar{z}| \right)$$

En effet, si $z = a+ib$, $a,b \in \mathbb{R}$, alors

$$(a+ib)(a-ib) = a^2 - (i \cdot b)^2 = a^2 + b^2$$

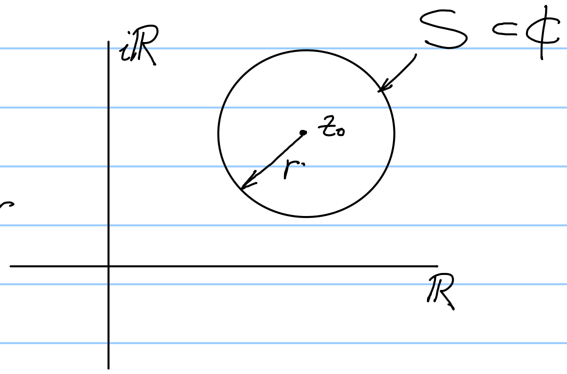
On a $\boxed{\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|}$ vérifier !

Application à la géométrie:

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$S := \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r \}$$

est l'ensemble des points sur le cercle de rayon r, centré en z_0.



Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

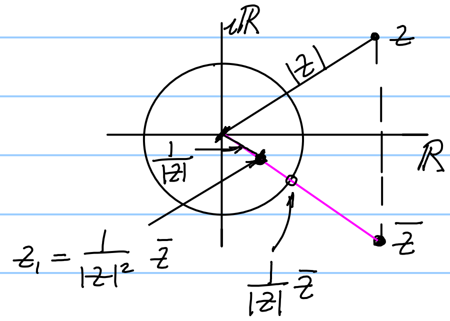
Chapitre 2

Introduction aux nombres complexes

2.4 Élément inverse pour la multiplication

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0 \equiv (0,0)$. On cherche $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $z \cdot z_1 = (1,0) \equiv 1 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

$$\boxed{\text{Proposition: } z_1 = \underbrace{\frac{1}{|z|^2}}_{\substack{\text{élément inverse} \\ \text{de } |z|^2 \text{ dans } \mathbb{R}}} \cdot \bar{z} =: \frac{1}{z}}$$



En effet:

$$z \cdot z_1 = z \cdot \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \underbrace{z \cdot \bar{z}}_{= |z|^2} = \frac{1}{|z|^2}\,|z|^2 = 1$$

par définition de la valeur absolue.

Notation pour l'inverse: $\frac{1}{z}$, z^{-1}

Remarque: " $\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\,\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{1}{z \cdot \bar{z}}\,\bar{z} = \frac{1}{|z|^2}\,\bar{z}$ "

Remarque: $\left| \frac{1}{|z|^2}\,\bar{z} \right| = \frac{1}{|z|^2}\,|\bar{z}| = \frac{1}{|z|^2}\,|z| = \frac{1}{|z|}$

(voir le dessin)

Explicitement pour $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a^2+b^2}\,(a - ib) = \frac{a}{a^2+b^2} + i\,\frac{-b}{a^2+b^2}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

Du coup, pour $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = (a+ib) \cdot \frac{1}{c^2+d^2}(c-id)$$

$$= \underbrace{\frac{ac+bd}{c^2+d^2}}_{= \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} + i \underbrace{\frac{bc-ad}{c^2+d^2}}_{= \operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 2

Introduction aux nombres complexes

2.5 Formule d'Euler et de Moivre

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. On pose

$$\boxed{e^{i\varphi} := \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \quad \text{formule d'Euler}}$$

On a pour $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = (\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$$

$$= \ldots = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Formules d'addition d'angles pour sin et cos

Ceci permet de définir pour $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\boxed{e^z = e^{a+ib} := e^a \cdot e^{ib}}$$

exponentielle réelle

et on a la règle habituelle pour la fonction exponentielle:

$$\boxed{\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}} \quad (*)$$

ainsi que $\boxed{\overline{e^z} = e^{\bar{z}}}$ (vérifier !)

De $(*)$ il suit en particulier que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, z \in \mathbb{C} \quad (e^z)^n = e^{n \cdot z}}$$

(démonstration par récurrence).

Formule de Moivre

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi \in \mathbb{R}$ on a (formule de Moivre)

$$\cos(n\cdot\varphi) + i\sin(n\cdot\varphi) \underset{\text{Euler}}{=} e^{in\varphi} \underset{\substack{\text{propriété de}\\ \text{l'exponentielle}}}{=} (e^{i\varphi})^n \underset{\text{Euler}}{=} (\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))^n,$$

$\underline{n=2}$ (formules de l'angle double)

$$\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi) = (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^2$$

$$= (\cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2) + i(2\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi))$$

$\Longrightarrow$ même point du plan $\mathbb{C}$

$$\cos(2\varphi) = \cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2$$
$$\sin(2\varphi) = 2\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)$$

$\underline{n=3}$

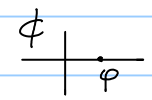
$$\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi) = (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^3$$

et donc :

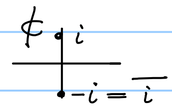
$$\cos(3\varphi) = \cos(\varphi)^3 - 3\cos(\varphi)\sin(\varphi)^2$$
$$\sin(3\varphi) = 3\cos(\varphi)^2\sin(\varphi) - \sin(\varphi)^3$$

Remarque: Puisque $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ on a pour $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{aligned}\cos(\varphi) &= \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\\ \sin(\varphi) &= \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\end{aligned}\right\} (**)$$



car on a $\overline{e^{i\varphi}} = e^{\overline{i\varphi}} = e^{\overline{i}\,\overline{\varphi}} = e^{-i\varphi}$



Remarque : On peut utiliser (**) pour généraliser la définition de sin et cos aux nombres complexes :

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$z \in \mathbb{C}$$

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

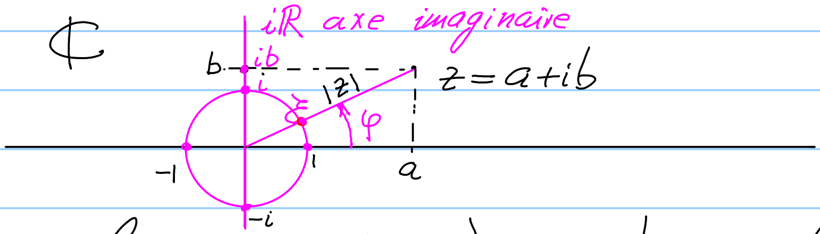
vidéo A

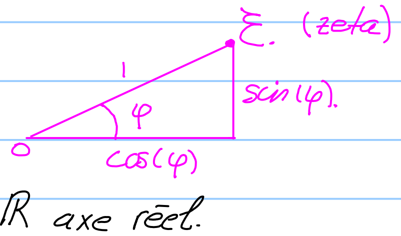
Chapitre 2

Introduction aux nombres complexes

2.6. Forme polaire d'un nombre complexe

2.6.1. Définitions





Soit $z \neq 0$, alors $z = |z|\,\xi$ où $\xi = \frac{1}{|z|} z$ et $|\xi| = \frac{1}{|z|}|z| = 1$.

voir le dessin

$|\xi| = 1 \Rightarrow \xi = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \underset{\text{Euler}}{=} e^{i\varphi}$ utiliser $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

pour un certain φ. Tout $z = a+ib \neq 0$, $a,b \in \mathbb{R}$ est donc de la forme

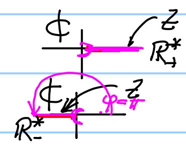
$$a + i\,b = \boxed{z = |z| \cdot e^{i\varphi}}$$ (φ est déterminé à $k \cdot 2\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$)

appelée la forme ou la représentation polaire de $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

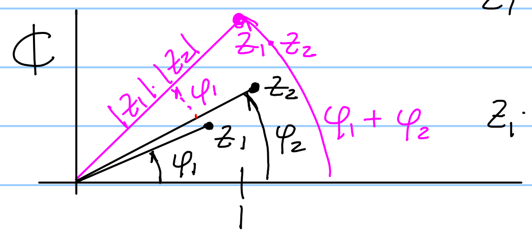
Définition (convention): le nombre $\varphi \in]-\pi, \pi]$ est appelé l'argument de $z \in \mathbb{C}^*$, $\varphi = \arg(z)$.

Remarques

- pour $z \in \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{C}^*$ on a $\varphi = \arg(z) = 0$
- pour $z \in \mathbb{R}_-^* \subset \mathbb{C}^*$ on a $\varphi = \arg(z) = \pi$



- pour $z = a+ib \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-^*$ on a $\varphi = \arg(z) = 2 \cdot \arctan\left(\frac{b}{a+|z|}\right)$
  $= \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ (si $a > 0$)
- la forme polaire est mieux adaptée à la multiplication des nombres complexes que la forme cartésienne. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ alors :

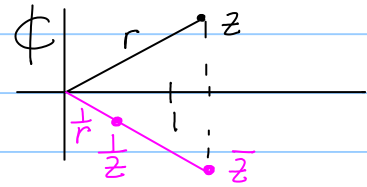


$$z_1 = |z_1|\, e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = |z_2|\, e^{i\varphi_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\cdot e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2} = |z_1||z_2|\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

- Soit $r>0$, $\varphi\in\mathbb{R}$. Alors l'inverse de $z = re^{i\varphi}$ est

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\,\bar{z} = \frac{1}{r^2}\, r\, \overline{e^{i\varphi}} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}$$

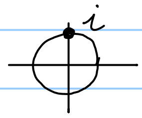


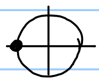
<u>En effet</u> :

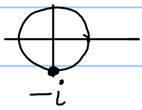
$$z\cdot\frac{1}{z} = r\cdot e^{i\varphi}\cdot\frac{1}{r}e^{-i\varphi} = 1\cdot e^{i(\varphi-\varphi)} = 1\cdot e^{i0} = e^0 = 1.$$

vidéo 3

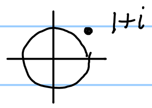
2.6.2. Exemples

1/2) 

$i = 1\cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$,  $-1 = 1\cdot e^{i\pi} = e^{i\pi}$

3) 

$-i = e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ $\left(\arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \text{ par convention}\right)$

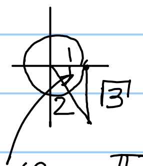
4) 

$1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\left[= \sqrt{2}\left(\overbrace{\cos(\tfrac{\pi}{4})}^{=\frac{\sqrt{2}}{2}} + i\,\overbrace{\sin(\tfrac{\pi}{4})}^{=\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = 1+i \right]$

<u>vérification</u>

5) en polaire
$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(\tfrac{\pi}{4}) - i\sin(\tfrac{\pi}{4})\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{|\sqrt{2}|^2}(1-i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{(calcul en cartésien)}$$

6) 

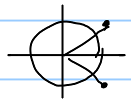
$1-\sqrt{3}\,i = 2\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$\varphi = -\frac{\pi}{3}$

$$(1-\sqrt{3}\,i)^{30} = \left(2\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{30} = 2^{30}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{30} =$$

$$= 2^{30} e^{-i\pi\cdot 10} = 2^{30}\big(\underbrace{e^{-i2\pi}}_{=1}\big)^5 = 2^{30} = \underbrace{1024^3}_{\parallel}$$

1'073'741'824

7)  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^4 = \left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^4 = e^{-i2\pi} = 1.$

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 2

Introduction aux nombres complexes

2.7 Résolution des équations

vidéo A

2.7.1. "Racines" n-ièmes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $w \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Alors, l'équation

$$\boxed{z^n = w} \qquad (*)$$

admet exactement n solutions $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire $(z_k)^n = w$, $k = 1, \ldots, n$. Les nombres z_k sont appelés les n "racines" de l'équation $(*)$. Si $w = 0$ la seule solution de $(*)$ est $z = 0$.

<u>"Méthode polaire"</u>

i) $w = |w| \, e^{i(\varphi + 2\pi k)} \qquad k = 0, \ldots, n-1$

ii) $z_{k+1} = |w|^{\frac{1}{n}} \, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi \frac{k}{n}\right)} \qquad k = 0, \ldots, n-1$

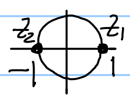
vidéo B

2.7.2. Exemples

1) $z^2 = 1 = e^{i(0 + k \cdot 2\pi)}, \quad k = 0, 1.$

$$z_{k+1} = e^{i \frac{k}{2} \cdot 2\pi} = e^{i k \cdot \pi}, \quad k = 0, 1.$$

$$z_1 = e^{i \cdot 0} = 1, \quad z_2 = e^{i\pi} = -1$$

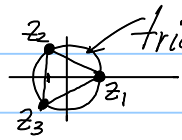


2) $$z^3 = 1 = e^{i(0 + k\cdot 2\pi)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

$$z_{k+1} = e^{i\frac{2\pi}{3}k}, \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_1 = e^{i0} = 1, \quad z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \overline{z_2}$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

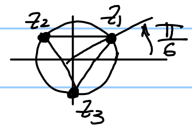


triangle équilatéral

3) $$z^3 = i = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\right)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

$$z_{k+1} = e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}$$

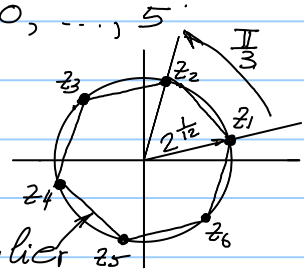


$$z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{9\pi}{6}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$$

4) $$z^6 = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi\right)}, \quad k = 0, \dots, 5.$$

$$z_{k+1} = \underset{\overset{\shortparallel}{(\sqrt{2})^{\frac{1}{6}}}}{2^{\frac{1}{12}}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{24} + k\cdot\frac{\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, \dots, 5$$



Hexagone régulier

vidéo C

2.7.3 Le cas $n=2$, méthode cartésienne

Exemple

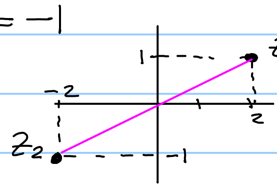
$z^2 = 3+4i$ $(*)$ on cherche $z = a+ib$, $a,b \in \mathbb{R}$.

$(a+ib)^2 = 3+4i$ $\quad \left.\begin{array}{ll} a^2-b^2 = 3 & ① \\ 2ab = 4 & ② \Rightarrow a \neq 0 \text{ et } b \neq 0 \end{array}\right\}$

$\underset{②}{\Longrightarrow} \boxed{b = \frac{2}{a}} \underset{①}{\Longrightarrow} a^2 - \frac{4}{a^2} = 3$

$\Longrightarrow (a^2)^2 - 3(a^2) - 4 = 0$ $(**)$

$\Longrightarrow (a^2-4)(a^2+1) = 0 \Longrightarrow$ $a=2$, $b=1$
$a=-2$, $b=-1$



Solutions : $z_1 = 2+i$, $z_2 = -2-i = -z_1$

$\boxed{\begin{array}{l}\text{\underline{Remarque}: attention aux solutions éventuelles de } (**) \\ \text{qui ne correspondent pas à des solutions de } (*)\end{array}}$

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers la vidéo C	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

vidéo A

Chapitre 2

Introduction aux nombres complexes

2.8. Théorème fondamental de l'algèbre

2.8.1. Le théorème

Tout polynôme $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ sont donnés, $a_n \neq 0$, admet dans $\mathbb{C}$ n "racines". C'est-à-dire il existe $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ tels que $p(z_k) = 0$, $k = 1, \dots, n$ et tels que l'on ait la représentation

$$\boxed{p(z) = a_n \cdot (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)}$$

Le cas réel: si $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, alors on a pour tout $z \in \mathbb{C}$ que $\overline{p(z)} = p(\bar{z})$ (vérifier !). Dans ce cas si $p(z_k) = 0$ on a aussi $p(\overline{z_k}) = 0$, car $p(\overline{z_k}) = \overline{p(z_k)} = \bar{0} = 0$.

Conséquence: les "racines" d'un polynôme à coefficients réels sont ou bien des nombres réels ou des paires de nombres complexes conjugués.

Tout polynôme à coefficients réels peut être factorisé dans $\mathbb{R}$ en facteurs linéaires et quadratiques.

Explication:
$$\underbrace{(z - z_k) \cdot (z - \overline{z_k})}_{\text{deux facteur linéaires complexes}} = \underbrace{z^2 - \underbrace{(z_k + \overline{z_k})}_{= 2\,\mathrm{Re}(z_k) \in \mathbb{R}} z + \underbrace{z_k \cdot \overline{z_k}}_{= |z_k|^2 \in \mathbb{R}}}_{\text{un facteur quadratique réel}}$$

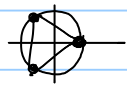
vidéo B

2.8.2. Exemples

1) $p(z) = z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2 = (z-1)(z-1)$

2) $p(z) = z^2 - 1 = (z+1)(z-1)$.

3) $p(z) = z^3 - 1 \overset{\text{dans } \mathbb{C}}{=} (z-1)\left(z - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(z - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

les trois "racines" de $z^3 = 1$ 

$\underset{\text{dans } \mathbb{R}.}{=} (z-1)(z^2+z+1)$

4) $p(z) = z^4 - 1 = (z^2+1)(z^2-1) \overset{\text{dans } \mathbb{R}}{=} (z^2+1)(z+1)(z-1)$

$\underset{\text{dans } \mathbb{C}}{=} (z+i)(z-i)(z+1)(z-1)$

A propos 3), division de polynôme: (supposée connue)

$(z^3 - 1) : (z-1) = z^2 + z + 1 \Rightarrow z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$.

$z^3 - z^2$

$z^2 - 1$

$z^2 - z$

$z - 1$

$z - 1$

0

":" = divisé par

vidéo C

2.8.3. Cas général de polynômes de degré deux

Formule de Viète:

Si $p(z) = az^2 + bz + c$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ donnés, alors

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b \text{ "}+\sqrt{b^2-4ac}\text{"}}{2a} \\ z_2 &= \frac{-b \text{ "}-\sqrt{b^2-4ac}\text{"}}{2a} \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

sont les deux "racines" de $p(z)$, c'est-à-dire $p(z_1) = p(z_2) = 0$ et $p(z) = a \cdot (z - z_1)(z - z_2)$.

Remarque: dans (*) "$\pm\sqrt{b^2-4ac}$" sont par définition les deux solutions de l'équation $z^2 = w = \underbrace{b^2 - 4ac}_{\in \mathbb{C}}$. Voir 2.7.1 et 2.7.2.

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers la vidéo C	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 3

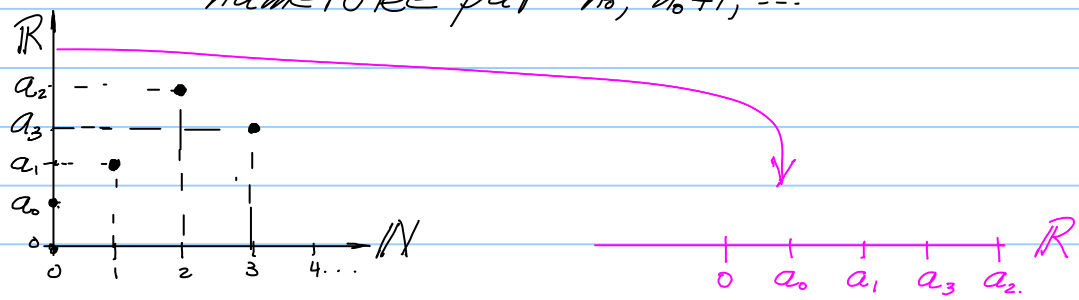
Suites de nombres réels

3.1. Définitions et exemples

Definition On appelle suite de nombres réels toute fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Notation: On pose $a_n = f(n)$ et on écrit (a_n) ou $(a_n)_{n \geq 0}$ ou a_n, $n \in \mathbb{N}$, ou $a_0, a_1, \ldots$ pour la suite.

Remarque: On écrira $(a_n)_{n \geq n_0}$, etc. pour une suite numerotée par $n_0, n_0+1, \ldots$



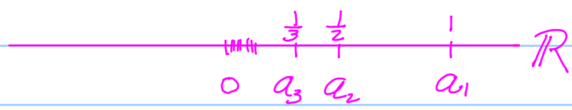
On s'interesse à l'image de f

$$\begin{aligned} Im(f) &= \{x \in \mathbb{R} : x = a_n = f(n) \text{ pour un } n \in \mathbb{N}\} \\ &\equiv \{a_0, a_1, a_2, \ldots\} \equiv A \subset \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exemples

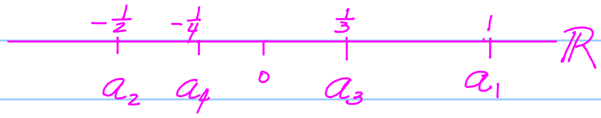
i) Suite harmonique

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \qquad ; \quad a_1 = 1, \ a_2 = \frac{1}{2}, \ a_3 = \frac{1}{3}, \ldots$$



ii) Suite harmonique alternée

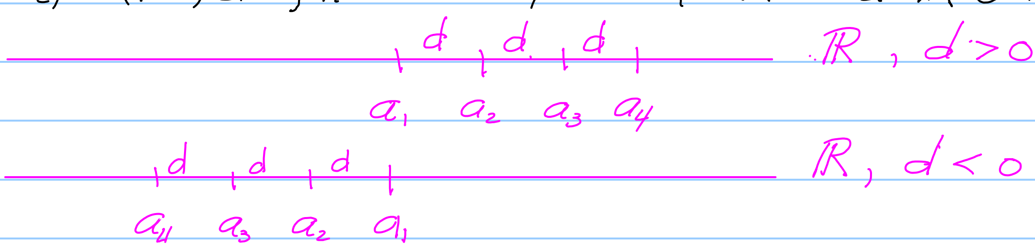
$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \quad n\in\mathbb{N}^* \qquad a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3}, \ldots$$



Convention (rappel): $x^{0} := 1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. (zéro)

iii) Suites arithmétiques

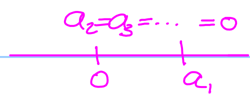
$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad n\in\mathbb{N}^*, \quad \text{où } a_1\in\mathbb{R} \text{ et } d\in\mathbb{R} \text{ sont donnés}$$



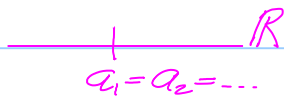
iv) Suites géométriques

$$a_n = a_1\cdot q^{n-1}, \quad n\in\mathbb{N}^* \qquad \text{où } a_1, q\in\mathbb{R} \text{ sont donnés}$$

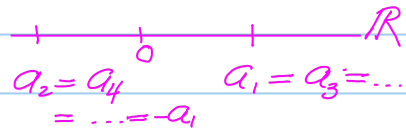
- si $q=0$: a_1, $a_n = 0$, $n=2,3,\ldots$



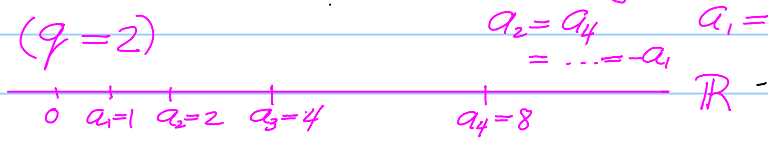
- si $q=1$: $a_n = a_1$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$



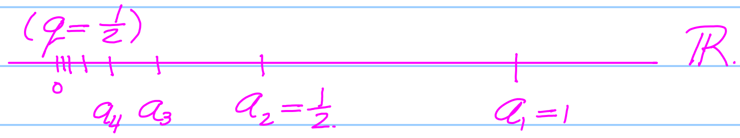
- si $q=-1$: , a_1, $a_2=-a_1$, $a_3=a_1$, ..



- si $|q|>1$:



- si $0<|q|<1$:



Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 3

Suites de nombres réels

3.2. Suites définies par recurrence

$\boxed{\text{Donnés } a_1 \in \mathbb{R} \text{ et une fonction } g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}}$ on pose

$$\boxed{a_{n+1} = g(a_n) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots}$$

Exemples

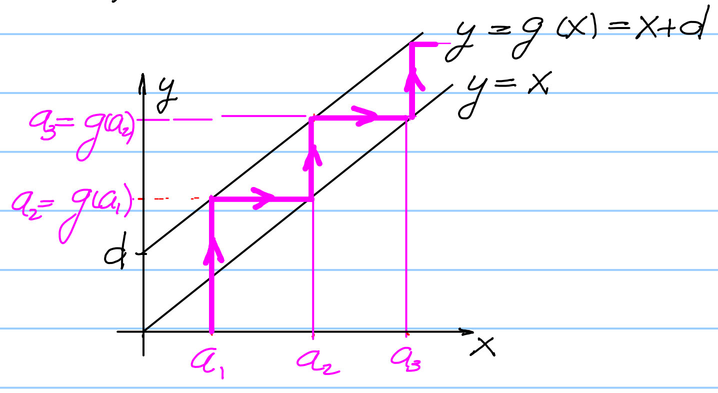
démonstrations par recurrence !

i) $g(x) = x + d$, $d \in \mathbb{R}$, c-à-d $a_{n+1} = a_n + d$ → (suite arithmétique)

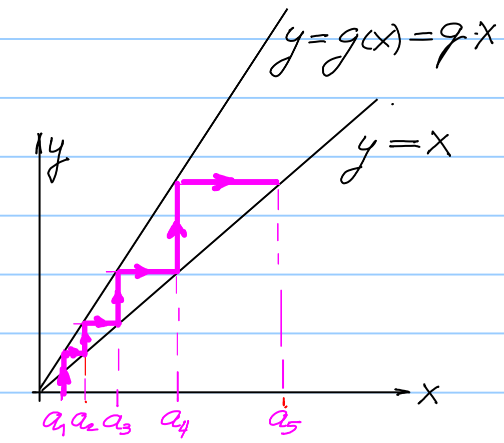
ii) $g(x) = x \cdot q$, $q \in \mathbb{R}$, c-à-d. $a_{n+1} = a_n \cdot q$ → (suite géométrique)

Graphiquement

i)



ii)



iii) $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ pour $\underline{a_1 = 1}$ on obtient la suite harmonique

$a_n = \dfrac{1}{n}$: $P(n)$.

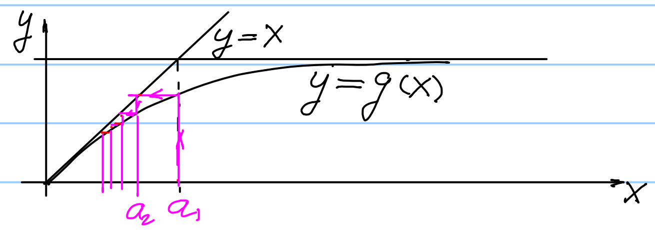
Démonstration

i) $a_1 = \frac{1}{1} = 1$: $P(1)$ ✓

ii) $a_{n+1} = g(a_n) \underset{P(n)}{=} g\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1} = \dfrac{1}{n+1}$: $P(n+1)$.

donc $\forall n \geq 1$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Graphiquement



Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 3

Suites de nombres réels

3.3. Propriétés de base

vidéo A

3.3.1 Définitions (pour $n_0 = 0$)

<u>Suite croissante</u>: une suite (a_n) est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \geq a_n$

<u>Suite strictement croissante</u>: une suite (a_n) est strictement croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} > a_n$

<u>Suite décroissante</u>: une suite (a_n) est décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leq a_n$.

<u>Suite strictement décroissante</u>: une suite (a_n) est strictement décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} < a_n$

<u>Suite (strictement) monotone</u>: une suite (a_n) est (strictement) monotone si elle est <u>soit</u> (strictement) croissante <u>soit</u> (strictement) décroissante.

<u>Suite majorée</u>: une suite (a_n) est majorée si l'ensemble $A = \{a_0, a_1, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ est majoré (voir 1.3. !)

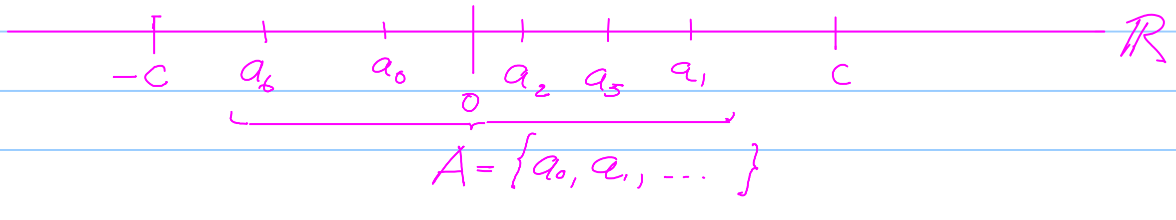
<u>Suite minorée</u>: une suite (a_n) est minorée si l'ensemble $A = \{a_0, a_1, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ est minoré (voir 1.3. !)

<u>Suite bornée</u>: une suite (a_n) est bornée si elle est majorée <u>et</u> minorée.

<u>Critère</u>: une suite (a_n) est bornée si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq c$

<u>Démonstration</u>

"$\Leftarrow$" (si)



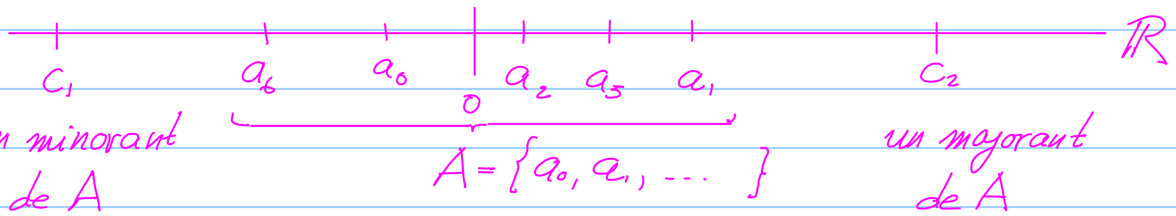
Si, $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq c$: $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, -c \leq a_n \leq c$

$\Rightarrow \forall x \in A, -c \leq x \leq c$

$\Rightarrow$ A un ensemble borné (voir 1.3. ?)

$\Rightarrow$ (a_n) un suite bornée (voir la définition)

"$\Rightarrow$" seulement si



Si (a_n) est une suite bornée : $\Rightarrow A = \{a_0, a_1, \dots\}$ est un ensemble borné

$\Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in A,\ c_1 \leq x \leq c_2$.

$\Rightarrow \forall x \in A, -c \leq x \leq c$, où $c = \text{maximum}\{|c_1|, |c_2|\}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, -c \leq a_n \leq c$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| \leq c$.

vidéo B

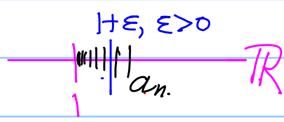
3.3.2. Exemple (inf et sup)

$a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\qquad a_1 = 2,\ a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \dots$

Soit $A = \{a_1, a_2, \dots\}$.

$\sup A = \text{maximum } A = 2$ (car $2 \in A$ et $1 + \frac{1}{n} \leq 2$, $n = 2, 3 \dots$)

Proposition $\inf A = 1 \notin A$



Démonstration:

i) $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq 1 + \frac{1}{n} = a_n$. (1 est un minorant)

ii) il faut montrer que $\forall \varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) il existe n_0 tel que $a_{n_0} \leq 1 + \varepsilon$ (1 est le plus grand minorant).

Soit $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Pour ce n_0 on a $a_{n_0} = 1 + \frac{1}{n_0} \leq 1 + \varepsilon$.

n_0 existe car $\mathbb{R}$ est archimédien et il existe donc n_0 tel que $n_0 \cdot \varepsilon > 1$

<u>Remarque</u>: on a en fait montré le résultat plus fort que <u>pour tout $n \geq n_0$</u> (et pas seulement pour $n = n_0$) $1 \leq a_n = 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{n_0} = a_{n_0} \leq 1 + \varepsilon$.

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 3

Suites de nombres réels

3.4. Limite d'une suite

<u>Définition</u> une suite (a_n) est convergente et admet pour limite (ou converge vers) $a \in \mathbb{R}$, et l'on écrit

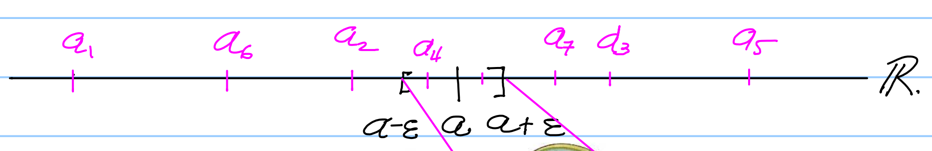
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ $|a_n - a| \leq \varepsilon$.

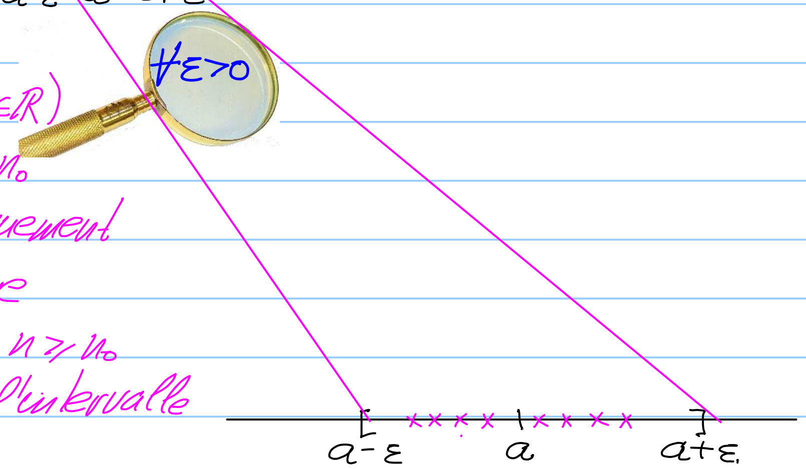
<u>Terminologie</u>: si la suite (a_n) admet une limite $a \in \mathbb{R}$ on dit aussi que la limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe. Dans le cas contraire on dit que la limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ n'existe pas.

<u>Rappel</u>: $|a_n - a| \leq \varepsilon \iff a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon$

$$\left[\ |a_n - a| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq a_n - a \leq \varepsilon \iff a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon\ \right]$$



"pour tout $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$)
on peut trouver n_0
(qui dépendra typiquement
de ε) de sorte que
tous les a_n avec $n \geq n_0$
se trouvent dans l'intervalle
$[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$."



Remarque: la démonstration dans 3.3.2 Exemple montre que la suite $a_n = 1+\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ converge vers $a=1$, car on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0 \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, $1 \leqslant a_n \leqslant 1+\varepsilon$.
$\Longrightarrow |a_n - 1| \leqslant \varepsilon$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Remarque: dans 3.3.2 Exemple on a donc
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf A$, où $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$

Voir le théorème dans 3.9.1

Notations équivalentes:

$$\text{"}\lim_{n\to\infty} a_n = a\text{"} \equiv \text{"}a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a\text{"} \equiv \text{"}a_n \longrightarrow a, \text{ lorsque } n\to\infty\text{"}$$

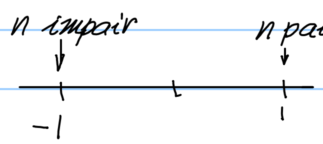
Exemples

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ (voir 3.3.2 Exemple)

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Démonstration: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$ $(\Leftarrow \exists n_0 \text{ tel que } n_0 \cdot \varepsilon \geqslant 1)$
$\Rightarrow \forall n \geqslant n_0$, $0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0}$
$\Rightarrow \forall n \geqslant n_0$, $\left|\frac{1}{n} - 0\right| \leqslant \frac{1}{n_0} \leqslant \varepsilon$ $\lrcorner$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ n'existe pas



Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 3

Suites de nombres réels

3.5. Deux propositions

Proposition: si une suite converge sa limite est unique.

Démonstration 3.5 (démonstration par l'absurde)

Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ avec $a \neq b$. Alors

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \overset{\text{Déf.}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists n_1$ tel que, $\forall n \geq n_1$, $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (1)

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b \overset{\text{Déf.}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists n_2$ tel que, $\forall n \geq n_2$, $|a_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (2)

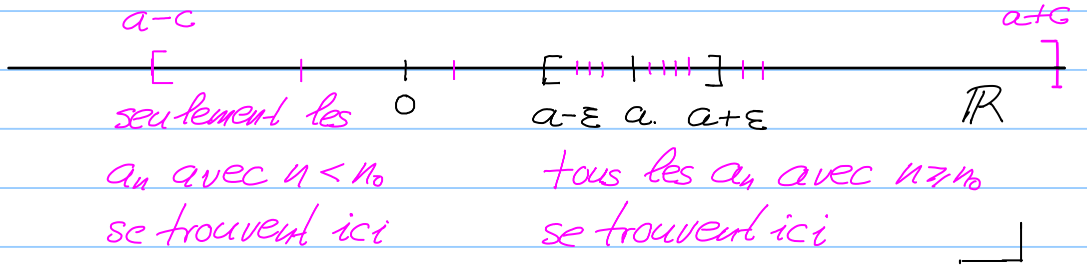
Donc, pour $n \geq n_0 := \text{maximum}\{n_1, n_2\}$, on a à la fois (1) et (2) et donc, puisque $a - b = (a - a_n) + (a_n - b)$, on obtient que, pour tout $n \geq n_0$

$$0 \leq |a - b| \leq |a - a_n| + |b - a_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

et on a donc que $\forall \varepsilon > 0$, $0 \leq |a - b| \leq \varepsilon$. Ceci implique (voir 1.2) que $|a - b| = 0$ et donc $a = b$, en contradiction avec l'hypothèse que $a \neq b$.

Proposition: toute suite convergente est bornée.

Explication:



Démonstration:

Soit $\varepsilon = 1$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|a_n - a| \leq 1$.

Soit $c = \text{maximum}\{1, |a_1 - a|, \dots, |a_{n_0-1} - a|\}$. Alors.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n - a| \leq c$, et donc:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| = |a + a_n - a| \leq |a| + |a_n - a| \leq |a| + c$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 3

Suites de nombres réels

3.6 Suites divergentes

Définition : une suite (a_n) qui n'est pas convergente est appelée divergente

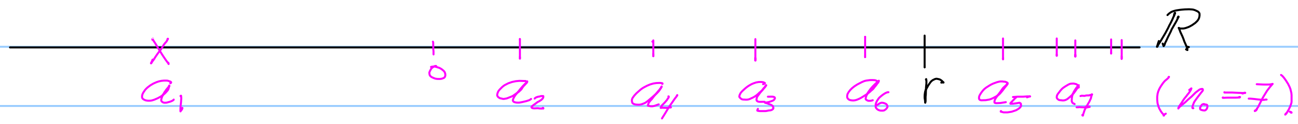
Exemple : $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ est une suite divergente

"Limites" infinies

Définition : soit (a_n) une suite telle que pour tout $r \in \mathbb{R}$ il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ $a_n \geq r$ $(a_n \leq r)$. Alors on écrit

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty \qquad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\right)$$

et on dit que la suite tend vers $+\infty$ (vers $-\infty$).



Exemples : $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty$.

Remarque : si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ou $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ alors la suite diverge ! (le démontrer ⚠).

Super-attention : on évitera de dire que la suite (a_n) "converge" vers $+\infty$ (ou $-\infty$) si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (ou $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

Remarque: la suite $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ diverge et elle ne tend pas non plus vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 3

Suites de nombres réels

3.7 Opérations algébriques sur les limites

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a :

i) $$\lim_{n\to\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta b_n) = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} a_n + \beta \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha a + \beta b$$

ii) $$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = a \cdot b$$

iii) $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{\underbrace{b_n}_{\neq 0}}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b} \quad \text{si } b \neq 0.$$

Démonstration: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

i) $$|(\alpha \cdot a_n + \beta b_n) - (\alpha a + \beta \cdot b)| \leq \underbrace{|\alpha| |a - a_n|}_{\leq \frac{1}{2}\varepsilon} + \underbrace{|\beta| |b - b_n|}_{\leq \frac{1}{2}\varepsilon} \leq \varepsilon$$

ii) $$|a_n b_n - a \cdot b| \leq \underbrace{|a_n - a| |b_n|}_{\leq \frac{1}{2}\varepsilon} + \underbrace{|b_n - b| |a|}_{\leq \frac{1}{2}\varepsilon} \leq \varepsilon$$

$a_n b_n - a b = (a_n - a) b_n + (b_n - b) a$

on utilise que la suite (b_n) est bornée.

iii) similaire à ii)

Exemple:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n-5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(2 + \frac{3}{n}\right)}{n\left(3 - \frac{5}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n\left(1 + \frac{3}{2n}\right)}{3n\left(1 - \frac{5}{3n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3} \frac{1 + \frac{3}{2n}}{1 - \frac{5}{3n}}\right) = \frac{2}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{3}{2n}}{1 - \frac{5}{3n}} =$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{3n}\right)} = \frac{2}{3}\,\frac{1+\frac{3}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1-\frac{5}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}.$$

Attention aux hypothèses (le **Si**)

$$1 = \lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} n}{\lim\limits_{n\to\infty} n} = \frac{\infty}{\infty}$$

n'est pas définie

le **Si** n'est pas vérifié

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 3

Suites de nombres réels

3.8 Théorème des deux gendarmes

Théorème : soient $(a_n), (b_n), (c_n)$, $n \in \mathbb{N}$ trois suites.

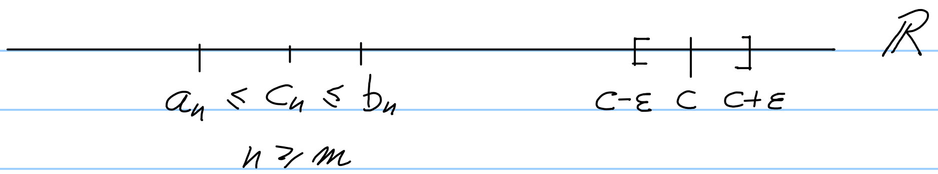
Si
i) $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = c$

ii) il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq m$

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

alors $\lim_{n\to\infty} c_n = c$.

Démonstration (voir aussi la démonstration 3.5)



On a $a_n \leq c_n \leq b_n \iff a_n - c \leq c_n - c \leq b_n - c$, $\forall n \geq m$ $(*)$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \geq m$ tel que $\forall n \geq n_0$ $\begin{cases} |a_n - c| \leq \varepsilon & ① \\ |b_n - c| \leq \varepsilon & ② \end{cases}$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$

$$-\varepsilon \underset{①}{\leq} a_n - c \underset{(*)}{\leq} c_n - c \underset{(*)}{\leq} b_n - c \underset{②}{\leq} \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$, $|c_n - c| \leq \varepsilon \overset{\text{Déf.}}{\iff} \lim_{n\to\infty} c_n = c$.

Exemples

i) $$a_n := -\frac{1}{n^2+1} \leqslant c_n = \frac{\cos(7n^2+3)}{n^2+1} \leqslant \frac{1}{n^2+1} =: b_n \,, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0, \qquad c_n \xrightarrow{n\to\infty} 0, \qquad b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

car $\sqrt{1+\frac{1}{n}} > 1$

ii) $$a_n := 1 \leqslant c_n = \sqrt{1+\frac{1}{n}} \leqslant \sqrt{\underbrace{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}_{=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}} = 1+\frac{1}{n} =: b_n \,, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$|x| \leqslant |y| \Leftrightarrow x^2 \leqslant y^2$

(voir 1.7)

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} 1, \qquad c_n \xrightarrow{n\to\infty} 1, \qquad b_n \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Astuce (exemple, voir aussi série 3)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right) \underset{\text{astuce}}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\,\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.$$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 3

Suites de nombres réels

3.9. Suites monotones

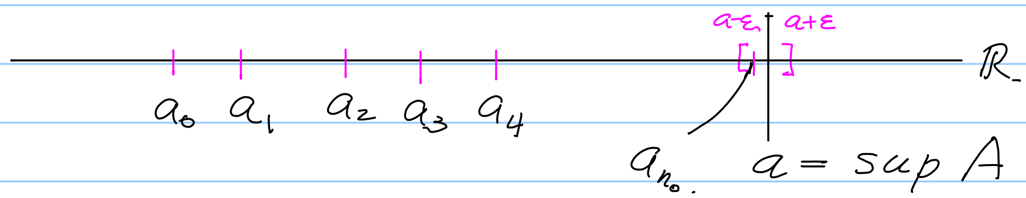
vidéo A

3.9.1 Critère de convergence

Théorème: toute suite (a_n) croissante et majorée (décroissante et minorée) est convergente et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup A$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf A\right)$ où $A = \{a_0, a_1, \dots\}$

Théorème: toute suite monotone et bornée est convergente

Démonstration: pour le sup, pour l'inf voir 3.3.2. Exemple



$a = \sup A$
$= \sup\{a_0, a_1, \dots\}$

i) $\forall n, \ a_n \leq a$

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ tel que $a_{n_0} \geq a - \varepsilon$ $\Big\}$ Définition du sup

iii) $\forall n \geq n_0, \ a_n \geq a_{n_0}$ (la suite est croissante)
$a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_{n_0}$

i)+ii)+iii) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0,$
$a - \varepsilon \leq a_{n_0} \leq a_n \leq a.$
$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0, |a_n - a| \leq \varepsilon.$

Ceci montre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \sup\{a_0, a_1, \dots\}$ $\square$

Vidéo B

3.9.2. Exemples

Exemple 1

Soit $0 \leq q < 1$ et $a_n = q^n$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

i) la suite est décroissante.

ii) la suite est minorée par zéro.

i) + ii) + théorème : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = q \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = q \cdot a$

avec $a \in \mathbb{R}$ et donc $a = 0$.

définition de la limite
le montrer !

Remarque : puisque $|q^n| = |q|^n$, ceci implique que $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ pour tout $q \in \,]-1, 1[$.

le montrer !

Exemple 2

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ donnée par $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

Donc $a_1 = 1$, $a_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \geq a_1$, ...

i) la suite est croissante

$$n \geq 2: \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \right)}_{= a_{n-1}} + \frac{1}{n^2} = a_{n-1} + \frac{1}{n^2} \geq a_{n-1}$$

ii) la suite est bornée

$$\underset{2n+1 > n}{a_n \leq} \sum_{k=1}^{2n+1} \underbrace{\frac{1}{k^2}}_{>0} = 1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{2n+1} \frac{1}{k^2}}_{= \sum\limits_{\substack{k \text{ pair} \\ k=2\ell}} + \sum\limits_{\substack{k \text{ impair} \\ k=2\ell+1}}} = 1 + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{(2\ell)^2} + \sum_{\ell=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{(2\ell+1)^2}}_{\leq \frac{1}{(2\ell)^2}}$$

$$a_n \leq 1 + \frac{1}{4}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell^2} + \frac{1}{4}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell^2} = 1 + 2\cdot\frac{1}{4}a_n = 1+\frac{1}{2}a_n$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}a_n \leq 1 \Rightarrow a_n \leq 2$$

i) + ii) + le théorème $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $a \leq 2$.

En fait (voir plus loin dans le cours) $a = \frac{\pi^2}{6}$

A noter que $a_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \geq 1$

Exemple 3

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ donnée par $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ $\quad (\in \mathbb{Q})$.

Sans démonstration:

(a_n) est une suite croissante et majorée ($a_n \leq 3$).

Donc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a = \sup\{a_1, a_2, \dots\} \in \mathbb{R}.$$

En fait (voir plus loin dans le cours):

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =: e} = 2.71828\ldots \text{ (Nombre d'Euler)}$$

(une) définition (possible) de e

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 3

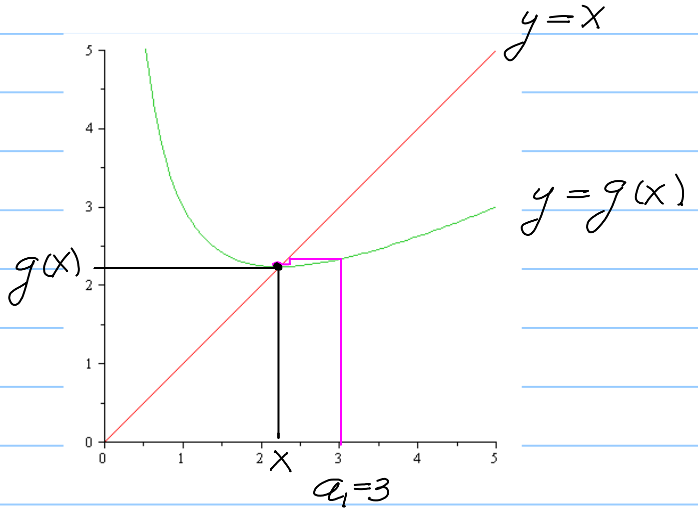
Suites de nombres réels

3.10 Convergence d'une suite définie par récurrence

Exemple: $\quad a_1 = 3 \quad , \quad g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$

$$x \longmapsto g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\frac{1}{x}$$

c'est-à-dire: $\boxed{a_n = g(a_{n-1}) = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{5}{2}\frac{1}{a_{n-1}}} \quad , n = 2, 3, \ldots$



Montrons que la suite est minorée et décroissante $\Rightarrow$ convergence

0) $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (la suite est bien définie, $a_n \in D(g)$)

par récurrence: i) $a_1 = 3 > 0$

ii) $a_n > 0$ si $a_{n-1} > 0$, $n = 2, 3, \ldots$

i) on calcule la limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a$ sous l'hypothèse que la suite est convergente.

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} a_{n-1} + \frac{5}{2}\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}} \overset{\text{lois algébriques}}{=} \frac{1}{2}a + \frac{5}{2}\frac{1}{a} \qquad (*)$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$, t.q.

$\forall n \geq n_0, |a_n - a| \leq \varepsilon \implies \forall n \geq n_0 + 1, |a_{n-1} - a| \leq \varepsilon$

$(*) \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2} a + \frac{5}{2} \frac{1}{a}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} a^2 = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{5} \quad$ (car $a_n > 0$ par o)).

ii) <u>la suite est minorée par $\sqrt{5}$</u>

<u>par récurrence:</u> $\quad a_n \geqslant \sqrt{5}$: $P(n)$.

i) $a_1 = 3 > \sqrt{5}$ (car $9 \geqslant 5$)

ii) $a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{5}{2} \frac{1}{a_{n-1}}$

$= \frac{1}{2 \cdot a_{n-1}} \left(a_{n-1}^2 + 5 \right)$

c'est ici que l'on utilise (en principe) $P(n-1)$: $a_{n-1} \geqslant \sqrt{5}$.

$= \frac{1}{2 a_{n-1}} \left(a_{n-1} - \sqrt{5} \right)^2 + \sqrt{5} \geqslant \sqrt{5}$

iii) <u>la suite est décroissante</u>

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{5}{2} \frac{1}{a_{n-1}} - a_{n-1}$$

$$= -\frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{5}{2} \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{-a_{n-1}^2 + 5}{2 \cdot a_{n-1}} \leqslant 0$$

par ii)

ii) + iii) $\Rightarrow$ la suite converge $\overset{i)}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \sqrt{5}$ $\quad \lrcorner$

<u>Remarques:</u>

- $a_n \in \mathbb{Q}, \quad n \in \mathbb{N}^*$
- $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, où $f(x) = x^2 - 5$ <u>voir plus loin, $f'(x) = 2x$</u>
- $g(a) = a \iff f(a) = 0$

Méthode de Newton pour la fonction f.

- une "machine" dans $\mathbb{Q}$ pour calculer $\sqrt{5}$ (dans la limite $n \to \infty$).

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 3

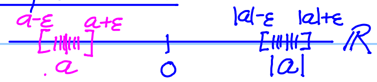
Suites de nombres réels

3.11 Bon à savoir ("grand finale", montrer les détails !)

i) toute suite convergente est bornée (voir 3.5).

ii) si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

Explication $(a<0)$



$\exists n_0$, t.q. $\forall n \geq n_0$, $a_n < 0$ $\Rightarrow$ $\exists n_0$, t.q. $\forall n \geq n_0$, $|a_n| = -a_n$

iii) règle de d'Alembert pour les suites

Si $\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \varrho \in \mathbb{R} \text{ existe}}_{(*)}$, alors

$0 \leq \varrho < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\varrho > 1 \Rightarrow$ la suite (a_n) diverge

$\varrho = 1 \Rightarrow$ pas de conclusion par ce critère

Explication (cas $\varrho < 1$)

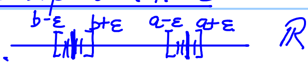
$(*) \Rightarrow \exists \varrho_1$, $\varrho < \varrho_1 < 1$, $n_0 \geq 0$, tel que $\forall n \geq n_0$

$|a_{n+1}| \leq \varrho_1 |a_n| \underset{\text{par réc.}}{\Rightarrow}$

$|a_n| \leq \varrho_1^{\,n-n_0} |a_{n_0}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

iv) si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in \mathbb{R}$ et s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $a_n \leq b_n$ alors $a \leq b$

Explication



si $b < a$

$\not\equiv$ $a_n \leq b_n$, $\forall n \geq n_0$

$\not\equiv$ "en contradiction avec"

v) si (a_n) est une suite croissante et (b_n) une suite décroissante telles que $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, alors

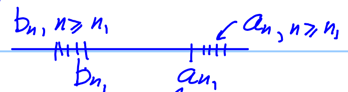
1) $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \ldots \leq b_0$, $\forall n$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

et si (a_n) et (b_n) sont des suites quelconques telles que $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, on a ou bien 2) ou les deux suites divergent.

Explication

1)



en contradiction avec $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$

2) $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n + \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = b + 0 = b$.

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 4

Suites de nombres réels, II

4.1. Suites de Cauchy

Critère de convergence $\Leftrightarrow$ définition de la convergence

Définition une suite (a_n), $a_n \in \mathbb{R}$ est une suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que pour tout $n, m \geq n_0$, $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$. $(\varepsilon \in \mathbb{R})$

Remarque: il suffit de contrôler les $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ ou $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

Remarque: si $a_n \in \mathbb{Q}$ (et $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$) c'est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

Théorème: dans $\mathbb{R}$ (mais pas dans $\mathbb{Q}$!) une suite (a_n) est une suite de Cauchy, si et seulement si (a_n) est une suite convergente.

Démonstration

"si"
$\Leftarrow$ par définition de $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Donc $\forall n, m \geq n_0$

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

"seulement si"
$\Rightarrow$
- une suite de Cauchy est une suite bornée.
  (le montrer !)
- on utilise le théorème de Bolzano–Weierstrass (voir 4.4) pour trouver la limite "a".

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 4

Suites de nombres réels, II

4.2 Construction de $\mathbb{R}$ (un modèle pour $\mathbb{R}$)

$X = \{$toutes les suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}\}$.

Relation d'équivalence sur X. Soit $(a_n) \in X$ et $(b_n) \in X$. Alors, par definition,

$$(a_n) \sim (b_n) \quad \text{si} \quad \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0,$$

c'est-à-dire si pour tout $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq n_0$, $|(a_n - b_n) - 0| = |a_n - b_n| \leq \varepsilon$.

Definition: $\mathbb{R} := X/_\sim$ avec les opérations

$+$: addition des suites: $(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n)$

$\cdot$: multiplication des suites: $(a_n)\cdot(b_n) := (a_n \cdot b_n)$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 4

Suites de nombres réels, II

4.3. Suites définies par récurrences linéaires

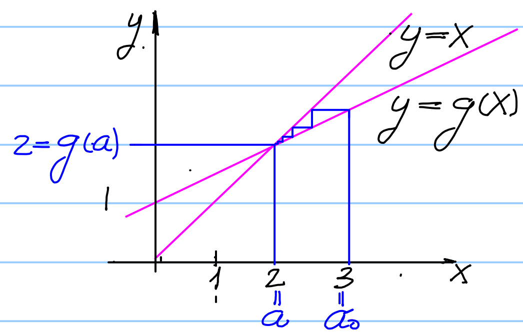
Théorème: soit $g(x) = q\cdot x + b$, $b, q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, $a := \frac{b}{1-q}$, et soit la suite

$$a_0 \in \mathbb{R}, \quad a_n = g(a_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

- si $|q| < 1$ ou si $a_0 = a$ alors $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
- si $|q| > 1$ et $a_0 \neq a$ alors la suite diverge

Remarque: $a = \frac{b}{1-q} \iff a = g(a)$

Exemple: $a_0 = 3$, $a_n = g(a_{n-1}) = \underbrace{\boxed{\tfrac{1}{2}}}_{=q}\, a_{n-1} + \underbrace{1}_{=b}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$



$q = \boxed{\tfrac{1}{2}} \Rightarrow$ convergence pour tout a_0.

$\lim_{n\to\infty} a_n = a = g(a) = 2.$

Démonstration du théorème

0) la suite est bien définie ($a_n \in \mathbb{R} = D(g)$).

i) si la suite converge vers a, alors

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} g(a_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} (q a_{n-1} + b) = qa + b = g(a)$$

ii) $n \geq 2$ $|a_n - a_{n-1}| = |(q a_{n-1} + b) - (q a_{n-2} + b)| =$

$$= |q| \cdot |a_{n-1} - a_{n-2}| = \cdots \underset{\text{par récurrence}}{=} |q|^{n-1} |a_1 - a_0|$$

$$\boxed{\Rightarrow \text{la suite diverge si } |q| > 1 \text{ et } a_0 \neq a.}$$

<u>Montrons que pour $|q| < 1$ c'est une suite de Cauchy:</u>

iii) soient, donné $n_0 \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq m+2$ et $|q| < 1$. Alors

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_{m+1} - a_m)|$$

$$\leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \dots + |a_{m+1} - a_m|$$

$$\underset{\text{utiliser ii)}}{=} (|q|^{n-1} + |q|^{n-2} + \dots + |q|^m) |a_1 - a_0|$$

$$= |q|^m (1 + |q| + \dots + |q|^{n-m-1}) |a_1 - a_0|$$

$$= |q|^m \cdot \underbrace{\frac{1 - |q|^{n-m}}{1 - |q|}}_{\text{voir les prérequis}} |a_1 - a_0|$$

$$\leq |q|^{n_0} \frac{1}{1 - |q|} |a_1 - a_0| \leq \varepsilon$$

utiliser $m \geq n_0$
et $|q| < 1$

si $|q| < 1$, alors $\forall \varepsilon > 0$
il existe n_0, tel que
"$\leq$" est satisfait
(ceci détermine n_0, donné ε)

$\Rightarrow$ (a_n) une suite de Cauchy

$\Rightarrow$ (a_n) une suite convergente

$$\boxed{\underset{\text{avec i)}}{\Rightarrow} \lim_{n \to \infty} a_n = a \qquad (|q| < 1).}$$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

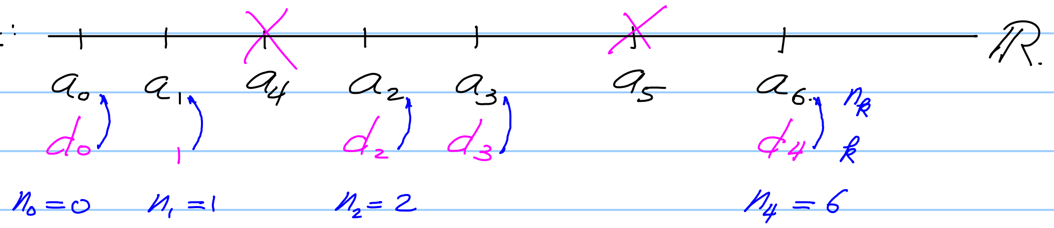
Chapitre 4

Suites de nombres réels, II

4.4. Théorème de Bolzano-Weierstrass

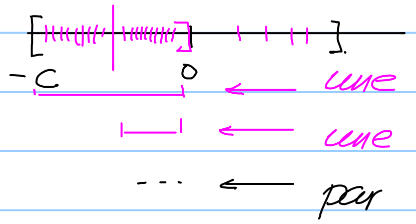
<u>Définition</u>: soit $(n_k)_{k\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels, c'est-à-dire que $n_k > n_\ell$ si $k > \ell$. Alors la suite $(d_k)_{k\geq 0}$, où $d_k = a_{n_k}$ est appelée une sous-suite de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$

<u>Exemple</u>:



<u>Théorème (B.W.)</u> de toute suite (a_n) <u>bornée</u> on peut extraire une sous-suite convergente

<u>Un argument</u>:



← une moitié avec une ∞-ité de a_n

← une moitié avec une ∞-ité de a_n

... ← par récurrence on localise un "a" possible.

<u>Définition</u>: $a \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation d'une suite (a_n) s'il existe une sous-suite (d_k) telle que $\lim_{k\to\infty} d_k = a$.

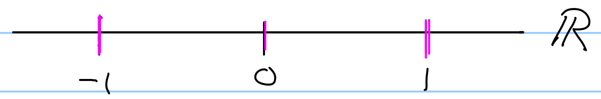
Le théorème de B.W. dit que toute suite bornée possède au moins un point d'accumulation.

Exemple 1 : $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. $\exists 2$ des points d'accumulation

$$d_k = a_{2k} \text{ converge vers } +1$$
$$d_k = a_{2k+1} \text{ converge vers } -1.$$

Exemple 2 $a_n = \begin{cases} 1, n \in \mathbb{N}^*, n \text{ pair}, n \text{ pas un multiple de } 3 \\ -1, n \in \mathbb{N}^*, n \text{ impair}, n \text{ pas un multiple de } 3 \\ 0, n \in \mathbb{N}^*, n \text{ un multiple de } 3 \end{cases}$

On a trois points d'accumulation, -1, 0 et 1.



$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$ $\qquad$ $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +1$.

le plus petit des points d'accumulation. $\qquad$ le plus grand des points d'accumulation

Exemple 3 : $a_n =$ "numérotation des nombres rationnels de $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$". Tout $x \in I$ est un point d'accumulation

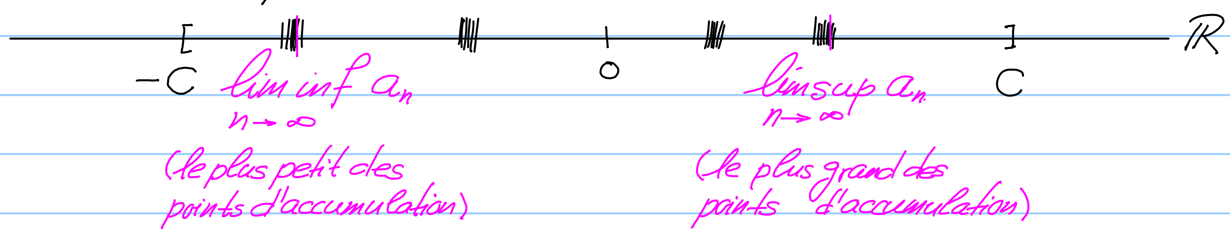
[Lien vers la vidéo correspondante]()	
[Lien vers le moteur de recherche du cours]()	

Chapitre 4

Suites de nombres réels, II

4.5 Limite inférieure et limite supérieure

Définition: soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée (c.-à-d. $\exists\, C>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|a_n|\leq C$).



Construction de $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ et $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$

$A_0 := \{a_0, a_1, \dots\}$ $\qquad b_0 := \inf A_0 \leq \sup A_0 =: c_0$

$A_1 := \{a_1, a_2, \dots\}$ $\qquad b_0 \leq b_1 := \inf A_1 \leq \sup A_1 =: c_1 \leq c_0$

b_0 est un minorant pour $A_1 \subset A_0$, mais pas forcément le plus grand minorant.

$\vdots$

$A_n := \{a_n, \dots\}$ $\qquad b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n := \inf A_n \leq \sup A_n =: c_n \leq \dots \leq c_1 \leq c_0$

(b_n) est une suite croissante et majorée $\Rightarrow$ convergence

(c_n) est une suite décroissante et minorée $\Rightarrow$ convergence

$$\boxed{\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n} = b \leq c = \boxed{\lim_{n\to\infty} c_n =: \limsup_{n\to\infty} a_n}$$

Voir le "bon à savoir"

Remarque: les b_n et c_n ne sont pas forcément des éléments de $A_0 = \{a_0, a_1, \dots\}$

Remarque: $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 4

Suites de nombres réels, II

4.6. Démonstration de B. W.

Donné une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ bornée, on construit une sous-suite $(d_k)_{k\geq 0}$, $d_k := a_{n_k}$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} d_k = \limsup_{n\to\infty} a_n \equiv c$$

<u>Rappel:</u> on a $A_m := \{a_m, \ldots\}$, $c_m := \sup A_m$

et $\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{m\to\infty} c_m =: c$

<u>Construction de la suite $(n_k)_{k\geq 0}$:</u>

i) on pose $n_0 = 0$

ii) $\forall k \geq 1$, donné n_{k-1}, on pose $m = n_{k-1}+1$

et choisit $a_\ell \in A_m$ tel que $|a_\ell - c_m| \leq \frac{1}{k}$

puis on pose $n_k := \ell$ propriété de $c_m := \sup A_m$

[A noter que par construction $n_k \geq m > n_{k-1}$]

iii) $\forall k \geq 1$, $|d_k - c| = |a_{n_k} - c| = |a_\ell - c_m + c_m - c|$

$$\leq \underbrace{|a_\ell - c_m|}_{\leq \frac{1}{k}} + |c_{n_{k-1}+1} - c| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 4

Suites de nombres réels, II

4.7. Séries numériques

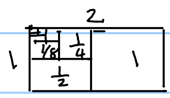
On aimerait définir des "sommes infinies" $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, pour (a_k) une suite de nombres réels donnée.
Une telle somme est appelée une série (numérique)

Définition: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n$, où $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

Donc
$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 && \Leftrightarrow a_0 = s_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 = s_0 + a_1 && \Leftrightarrow a_1 = s_1 - s_0 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 = s_1 + a_2 && \Leftrightarrow a_2 = s_2 - s_1 \end{aligned}$$

Terminologie:
- les a_k sont appelés les <u>termes</u> de la série (numérique)
- la somme finie s_n est appelée la n-ème somme partielle de la série (numérique)

Exemple: $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2$



$$\| \\ 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \dots$$

Définition: une série numérique est dite convergente, si la suite (s_n) des sommes partielles converge. La limite $s = \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathbb{R}$ est appelée la somme de la série (numérique)

Définition: une série qui n'est pas convergente est appelée divergente

<u>Définition:</u> une série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est dite <u>absolument convergente</u>, si la série $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converge.

<u>Remarques</u>

- toute série absolument convergente est convergente (le démontrer, utiliser le critère de Cauchy)
- la somme d'une série absolument convergente <u>ne dépend pas de la numérotation de ses termes</u> (sans démonstration)

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 4

Suites de nombres réels, II

4.8. Exemples

i) La série harmonique

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \qquad \text{cette série diverge}}$$

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \ldots$$

Proposition $\lim_{n \to \infty} S_n = \infty$ (la suite (S_n) est croissante mais pas majorée)

Démonstration :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad b_n := \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = S_{2n}$$

(c'est une sous-suite de S_n)

Supposons que $\underbrace{\lim_{n \to \infty} S_n = S \in \mathbb{R}}_{\text{Hypothèse, } (S_n) \text{ converge}} \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} b_n = S$

par définition de la limite !

Alors

$$b_n - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \underbrace{\frac{1}{k}}_{\geqslant \frac{1}{2n}} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

et donc

$$\frac{1}{2} \leqslant \lim_{n \to \infty} (b_n - S_n) = \lim_{n \to \infty} b_n - \lim_{n \to \infty} S_n = S - S = 0$$

$\times$. $\lrcorner$

ii) La série harmonique alternée

$$\boxed{s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}} = \ln(2) \qquad \left((-1)^0 := 1 \right)$$

- la série converge, mais pas absolument (voir 4.8, i))
- la série converge par le critère de Leibniz (voir 4.9, ii))

iii) La série géométrique

$$\boxed{s = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad \text{où } q \in \mathbb{R} \text{ est donné}}$$

- la série converge absolument pour $0 \leqslant |q| < 1$
- la série diverge pour $|q| \geqslant 1$.

Démonstration:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

et donc $s_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \dfrac{1}{1-q}$ si $|q| < 1$ et la suite (s_n) diverge si $|q| \geqslant 1$.

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 4

Suites de nombres réels, II

4.9. Critères de convergence

i) Critère nécessaire pour la convergence

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge} \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0}$$

Démonstration: si la série est convergente la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ est une suite de Cauchy. Ceci veut dire que $\forall \varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que $\forall n, m \geq n_0$, $|S_n - S_m| \leq \varepsilon$. En particulier $|S_{m+1} - S_m| \leq \varepsilon$ et donc $|a_{m+1}| \leq \varepsilon$. On a donc que $\forall \varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0 + 1$ $|a_n - \underset{\text{zéro}}{0}| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ii) Séries alternées : critère de Leibniz (sans démonstration)

Si (a_k) est une suite alternée (c'est-à-dire, $\forall k$, $(-1)^k a_k \geq 0$ ou $(-1)^k a_k \leq 0$), si $(|a_k|)$ est une suite strictement décroissante (c'est-à-dire, $\forall k$, $|a_{k+1}| < |a_k|$, et si $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

Exemple: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$, $|a_k| = \frac{1}{k}$

iii) Critères de comparaison (les démontrer !)

- Si, $\forall k$ $0 \leq |a_k| \leq b_k$ et si $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolument.

- Si, $\forall k$ $0 \leq b_k \leq a_k$ et si $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ diverge alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge.

iv) Critères de d'Alembert et de Cauchy

Théorème: (démonstration voir les exercices)

Soit $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Alors

si $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q \in \mathbb{R}$ d'Alembert

ou si $\lim_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = q \in \mathbb{R}$ Cauchy

ou si $\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = q \in \mathbb{R}$ critère du limsup

Alors, si $0 \leq q < 1$ la série converge absolument

si $q > 1$ la série diverge

si $q = 1$ pas de conclusion avec ces méthodes

Remarque: les critères donnent la même valeur de q (ou pas de valeur).

Exemples

i) $s = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{3k-4}{4k+5}\right)^k}_{=a_k}$ converge par Cauchy

car:

$$\lim_{k\to\infty}\left(|a_k|^{\frac{1}{k}}\right) = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{3k-4}{4k+5}\right| = \frac{3}{4} =: q < 1.$$

ii) $s = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + (-1)^k \frac{1}{4}\right)^k$ converge par le critère du limsup

$$\limsup_{k\to\infty}\left(|a_k|^{\frac{1}{k}}\right) = \limsup_{k\to\infty}\left|\frac{1}{2} + (-1)^k\frac{1}{4}\right| = \frac{3}{4} =: q < 1.$$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 4

Suites de nombres réels, II

4.10. Séries avec un paramètre (exemples)

1) $s = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k^2}{b^k}}_{=a_k}$, $b \in \mathbb{R}^*$ un paramètre

La convergence dépend de la valeur de b

Par d'Alembert:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(k+1)^2}{b^{k+1}}}{\frac{k^2}{b^k}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)^2}{b\cdot k^2} \right| = \frac{1}{|b|} =: q$$

i) la série converge absolument pour $|b|>1$ $(\Leftrightarrow q<1)$

ii) la série diverge pour $0<|b|<1$ $(\Leftrightarrow q>1)$

iii) pour $b=\pm 1$ on a $\sum_{k=1}^{\infty} k^2$ et $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^2$,

ces séries divergent par le critère 4.9, i) ∇!

2) $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k!} x^k}_{=: a_k}$, $x \in \mathbb{R}$ un paramètre , $0! := 1$, $x^0 := 1$

Pour $x=0$ la somme vaut 1, et pour $x \neq 0$ on a avec d'Alembert:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(k+1)!} x^{k+1}}{\frac{1}{k!} x^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{x}{k+1} \right| = 0 =: q < 1$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série converge donc absolument

En fait : $\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x}$ (voir plus tard)

En particulier $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} =: e = 2.718281828\ldots$

$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 5

Limite d'une fonction

5.1 Terminologie, conventions

Nous considérons des fonctions $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto y = f(x)$, où $D \equiv D(f) \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, est le domaine de définition de la fonction f.

Convention:
En pratique une fonction est souvent donnée par une expression (une formule). Alors il est entendu que D soit le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel l'expression est définie.

Exemples

$$f(x) = \sin(x) \longleftrightarrow \begin{array}{l} f: D \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto y = \sin(x) \end{array}, \quad D \equiv D(f) = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{2}{1-x^2} \longleftrightarrow \begin{array}{l} f: D \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto y = \frac{2}{1-x^2} \end{array}, \quad D \equiv D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

Fonctions polynômes

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k ,$$

pour $n \in \mathbb{N}$ donné et $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, .., n$ donnés.
$D(f) = \mathbb{R}$.

Fonctions rationnelles

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

p, q des fonctions polynômes

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\}$.

Fonctions algébriques

Fonctions construites à partir de fonctions polynômes et un nombre fini d'opérations $+, -, \cdot, /, \sqrt[n]{}$.

Fonctions transcendentes

Toutes les fonctions qui ne sont pas algébriques.

Exemples : e^x, $\ln(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$

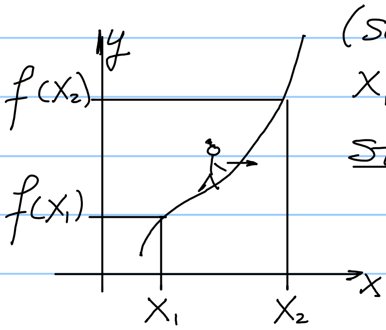
Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 5

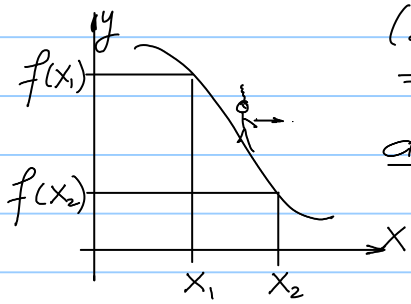
Limite d'une fonction

5.2. Définitions

Dans tout ce qui suit $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$



croissante : une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante (sur D) si pour tout $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Elle est strictement croissante si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



décroissante : une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est décroissante (sur D) si pour tout $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Elle est strictement décroissante si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

(strictement) monotone : une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, est (strictement) monotone, si elle est soit (strictement) croissante, soit (strictement) décroissante.

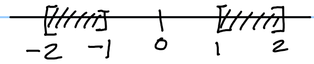
Critère : une fonction strictement monotone est injective

Démonstration pour tous les $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) < f(x_2)$ ou $f(x_1) > f(x_2)$ et donc $f(x_1) \neq f(x_2)$

$\blacksquare$

Définition: un ensemble $X \subset \mathbb{R}$ est symétrique (par rapport à zéro) si pour tout $x \in X$ on a que $-x \in X$.

Exemples: $[-1,2]$ ou $[-2,1]$ ne sont pas symétriques
$[-3,3]$ et $[-2,-1] \cup [1,2]$ sont symétriques



paire: une fonction $f: D \to \mathbb{R}$ est paire, si D est symétrique et si pour tout $x \in D$, $f(x) = f(-x)$

Exemples: $f(x) = 0$, 1, x^2, $\cos(x)$, $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sin^2(x)$

Notation: $\sin^2(x) \equiv (\sin(x))^2 \equiv (\sin x)^2 \equiv \sin^2 x \; (\equiv \sin(x)^2)$

impaire: une fonction $f: D \to \mathbb{R}$ est impaire, si D est symétrique et si pour tout $x \in D$
$f(x) = -f(-x)$.

Exemples: $f(x) = 0$, x, x^3, $\sin(x)$, $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, ...

périodique: une fonctions $f: D \to \mathbb{R}$ est périodique de période $T > 0$ ($\equiv T$-périodique), si

$$f(x+T) = f(x), \quad \forall x \in D \quad (*)$$

Remarque: $(*)$ implique en particulier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x + nT \in D$ si $x \in D$.

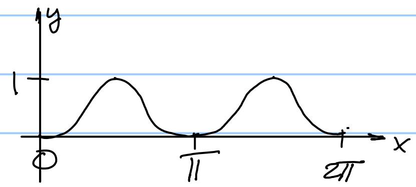
T est aussi appelé une période de f.

Le plus petit $T > 0$ (s'il existe) tel que $(*)$ est satisfaite est appelé la période de f.

Exemple: $f(x) = \sin^2(x)$

f est 2π-périodique

la période de f est π



Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 5

Limite d'une fonction

5.3. Les fonctions $\sinh(x)$ et $\cosh(x)$

Remarque: Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ avec D symétrique. Alors $f = f_+ + f_-$, avec f_+ paire et f_- impaire. Explicitement :

$$f_+(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) \quad \text{(partie paire de } f\text{)}$$

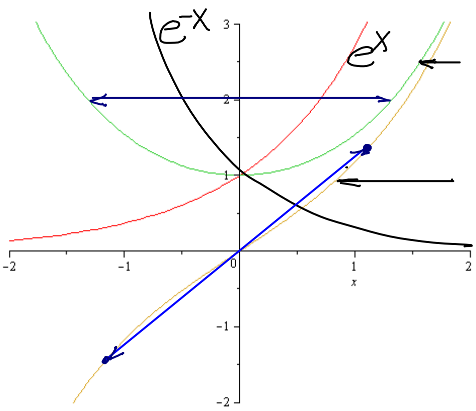
$$f_-(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) \quad \text{(partie impaire de } f\text{)}$$

Exemple: $f(x) = e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$ sur $D = \mathbb{R}$

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad \text{(partie paire de } e^x\text{)}$$

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \quad \text{(partie impaire de } e^x\text{)}$$

On a , $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1}$



$\cosh(x)$

$\sinh(x)$

$$\boxed{\begin{aligned} \tanh(x) &:= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}. \\ \coth(x) &:= \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{1}{\tanh(x)} \end{aligned}}$$

Pour les fonctions réciproques voir série 5

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 5

Limite d'une fonction

5.4. Opérations algébriques

Fonctions avec parité

Soient p, p_1, p_2 des fonctions paires et i, i_1, i_2 des fonctions impaires définies sur un domaine symétrique D et soit $f: D(f) \to \mathbb{R}$. Alors

$$\left.\begin{array}{ll} p_1 + p_2 & \text{est paire} \\ p_1 \cdot p_2 & \text{est paire} \\ i_1 + i_2 & \text{est impaire} \\ i_1 \cdot i_2 & \text{est paire} \\ p \cdot i & \text{est impaire} \end{array}\right\} \text{ sur } D \qquad (*)$$

$$\left.\begin{array}{ll} i_1 \circ i_2 & \text{est impaire} \\ f \circ p & \text{est paire} \\ p \circ i & \text{est paire} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{là où la} \\ \text{composition} \\ \text{est défini\'e}\end{array} \qquad (**)$$

Vérification de $(*)$ et $(**)$ (vérifier les autres cas !)

$$(*) \quad (i_1 \cdot i_2)(-x) = i_1(-x)\, i_2(-x) = \left(-i_1(x)\right) \cdot \left(-i_2(x)\right)$$
$$= i_1(x) \cdot i_2(x) = (i_1 \cdot i_2)(x)$$
$$(**) \quad (i_1 \circ i_2)(-x) = i_1\left(i_2(-x)\right) = i_1\left(-i_2(x)\right) = -i_1\left(i_2(x)\right)$$
$$= -(i_1 \circ i_2)(x)$$

Exemples

fonctions paires : $\cos(x) + x^2$, $\sin(x^2)$, $\cos(\sin(x))$, $\exp(\cosh(x))$

fonctions impaires : $\sin(x) + x$, $\sin(x^3)$, $\sin(\sinh(x))$

Fonctions périodiques

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions périodiques de période T_f et T_g, respectivement ($T_f, T_g > 0$) et soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Alors :

$$\left.\begin{array}{l} f+g \\ \\ f\cdot g \end{array}\right\} \text{ sont } T\text{-périodiques} \Longleftarrow \frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q} \quad (\text{voir } (*))$$

$$h \circ f \quad \text{est } T_f\text{-périodique}$$

<u>A propos $(*)$</u> : $\frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{T_f}{T_g} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{pgcd}(p,q) = 1$.

alors $T = p \cdot T_g = q \cdot T_f$.

<u>Attention</u>: même si T_f est <u>la</u> période de f est si T_g est <u>la</u> période de g, T n'est typiquement pas la période de $f+g$ ou $f\cdot g$, et T_f n'est typiquement pas la période de $h \circ f$.

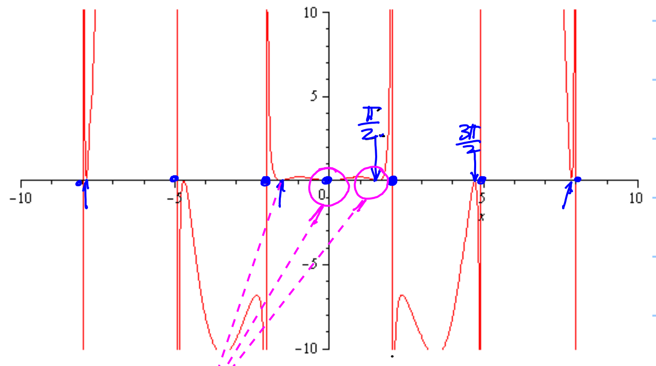
Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 5

Limite d'une fonction

5.5. Exemples

1)

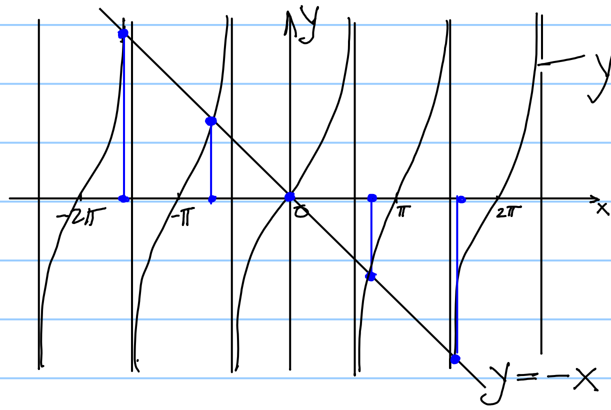


$$f(x) = \frac{x^3 \cdot \cos(x)}{x + \tan(x)}$$

- une fonction paire
- pas une fonction périodique.

$x = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \ldots$ à discuter car pas dans $D(f)$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x + \tan(x) \neq 0 \text{ et } \underbrace{x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}}_{\tan \text{ pas défini}}\}$$



$$x + \tan(x) = 0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\tan(x) = -x$$

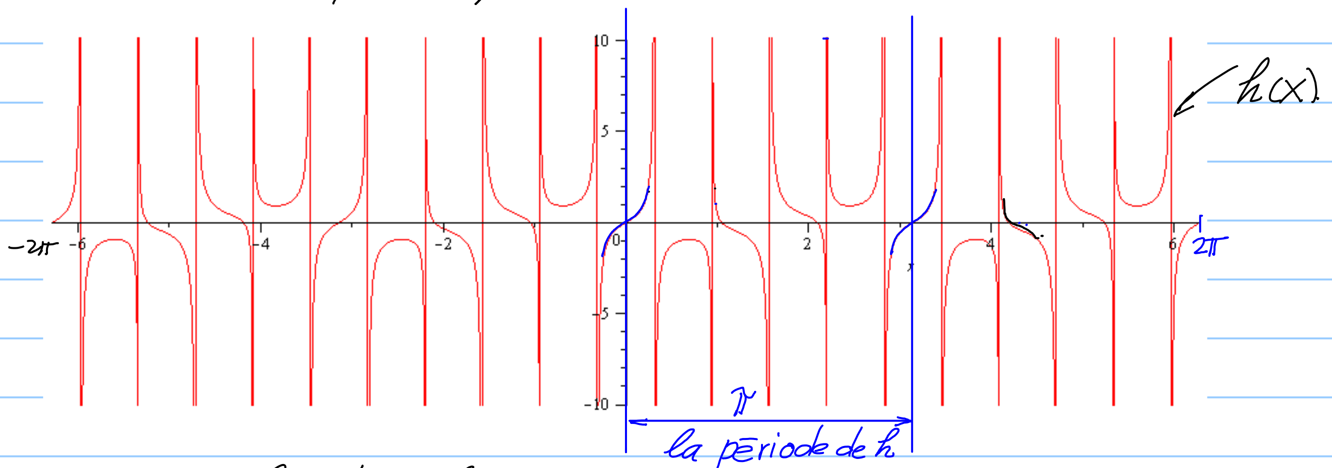
2) $h(x) = \dfrac{\sin(3x)}{\cos(5x)} =: \underbrace{f(x)}_{\frac{1}{\cos(5x)}} \cdot \underbrace{g(x)}_{\sin(3x)}$, $D(h) = \{x \in \mathbb{R} : \cos(5x) \neq 0\}$

la période de $\sin(3x)$ est $\frac{2\pi}{3} = T_g$

la période de $\dfrac{1}{\cos(5x)}$ est $\frac{2\pi}{5} = T_f$

on a $\dfrac{T_f}{T_g} = \dfrac{\frac{2\pi}{5}}{\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{3}{5} \in \mathbb{Q}$

$\Longrightarrow$ h est périodique de période $T = \frac{2\pi}{5} \cdot 5 = \frac{2\pi}{3} \cdot 3 = 2\pi$.



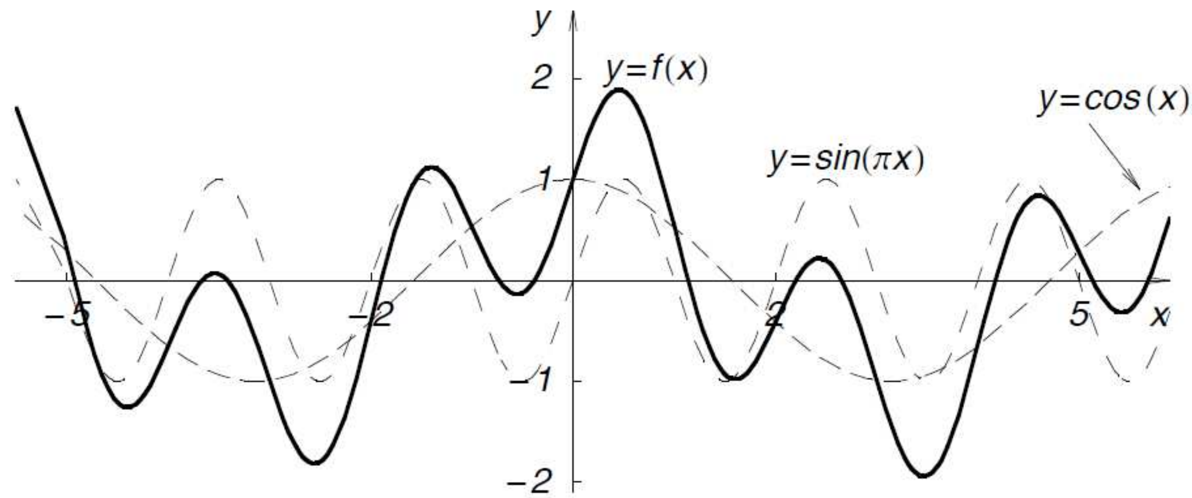
- la fonction h est impaire
- la fonction h est 2π-périodique ($n\pi$-périodique, $n \in \mathbb{N}^*$)
- la période de h est π. (par inspection du graphe)

3) $f(x) = \sin(\pi \cdot x) + \cos(x)$, $D(f) = \mathbb{R}$

$\sin(\pi \cdot x)$: la période est 2.

$\cos(x)$: la période est 2π

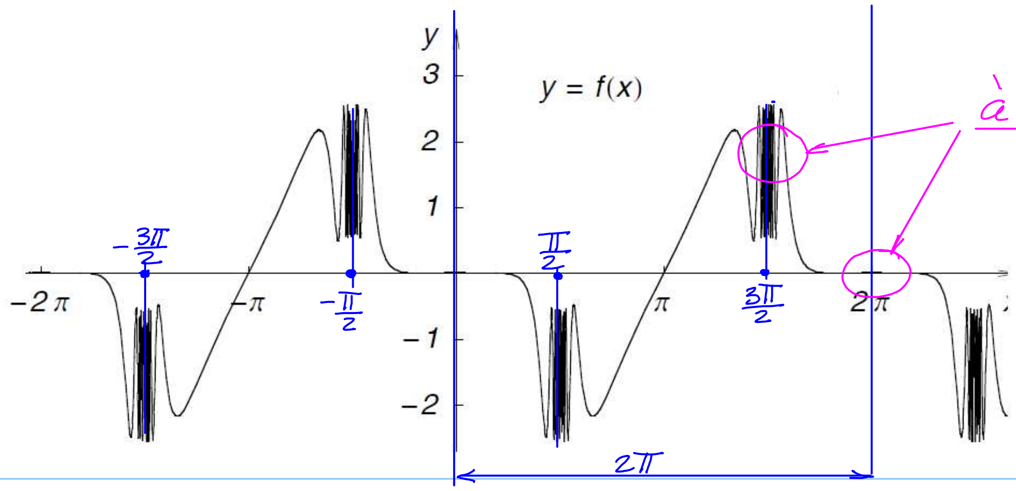
- la fonction n'est pas périodique $\left(\frac{2}{2\pi} \notin \mathbb{Q} \right)$
- f n'a pas de parité



4) $f(x) = \underbrace{\sin(\tan(x))}_{\substack{\text{définie sur } D(\tan) \\ \text{la période est } \pi}} - \underbrace{\tan(\sin(x))}_{\substack{\text{définie sur } \mathbb{R} \\ \text{la période est } 2\pi}}$

• $D(f) = D(\tan) \cap \mathbb{R} = D(\tan)$

• f est impaire et 2π-périodique $\left(\frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}\right)$



à discuter

• $\notin D(f)$

la période de f est 2π

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

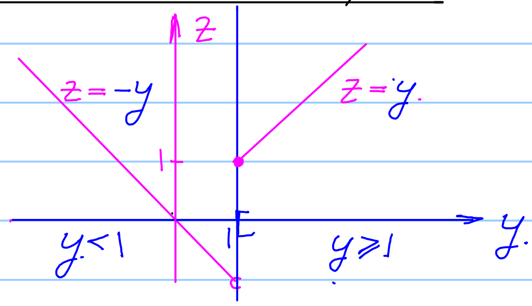
Chapitre 5

Limite d'une fonction

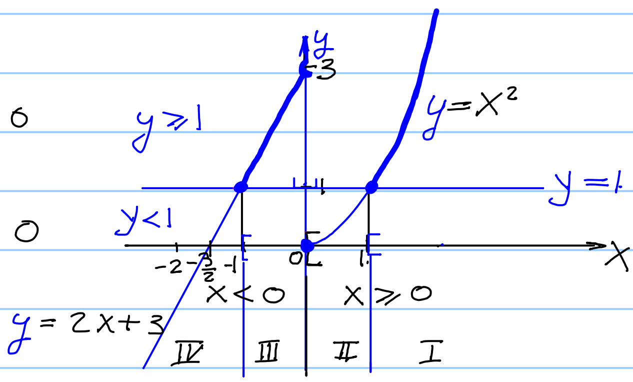
5.6 Fonctions définies par étapes

Composition de fonctions définies par étapes (un exemple)

$$z = f(y) = \begin{cases} y & \text{si} \quad y \geq 1 \\ -y & \text{si} \quad y < 1 \end{cases}$$



$$y = g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 2x+3 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

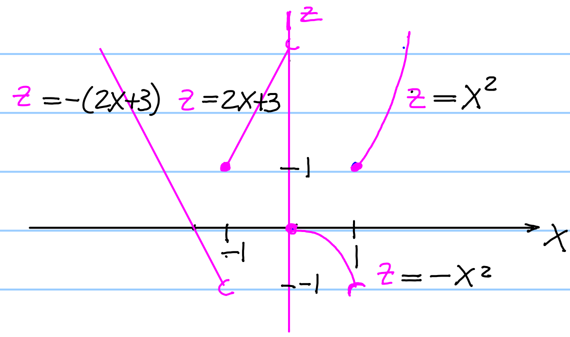


$$z = h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

I : $x \geq 0$ et $g(x) \geq 1$, II : $x \geq 0$ et $g(x) < 1$

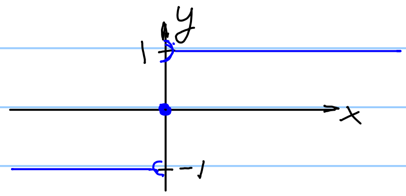
III : $x < 0$ et $g(x) \geq 1$, IV : $x < 0$ et $g(x) < 1$.

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ -x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 2x+3 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \\ -(2x+3) & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$$

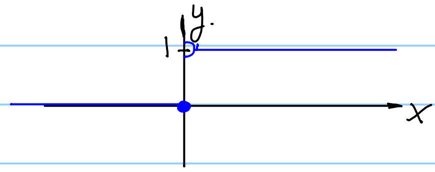


Les fonctions signum et Heaviside

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$



$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$



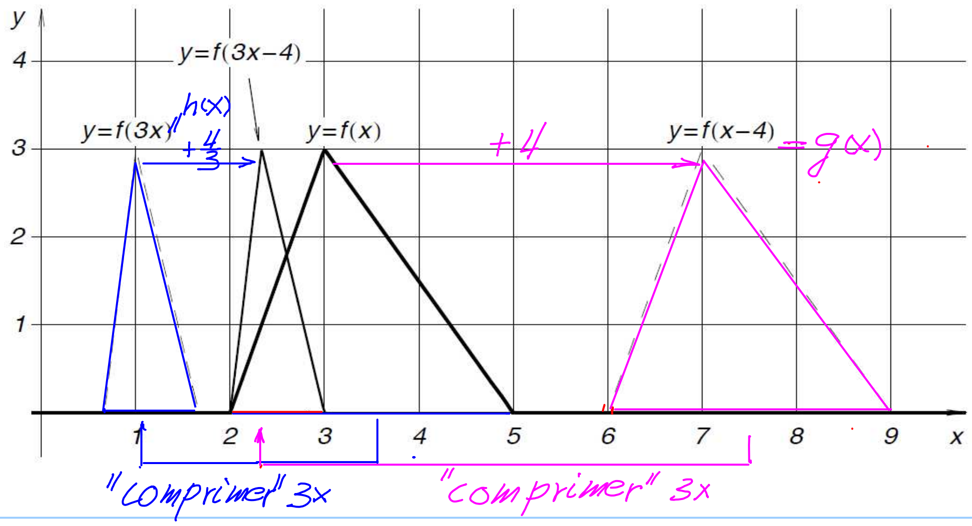
Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 5

Fonctions réelles d'une variable réelle

5.7. Transformations affines

<u>But:</u> donnés $a, b \in \mathbb{R}$ et le graphe d'une fonction $f(x)$, trouver le graphe de la fonction $f(ax+b)$.



$$f(3x-4) = f((3x)-4) = g(3x) \quad \text{où } g(x) := f(x-4)$$

$$= f\left(3\left(x-\tfrac{4}{3}\right)\right) = h\left(x-\tfrac{4}{3}\right) \quad \text{où } h(x) := f(3x)$$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

vidéo A

Chapitre 5

Limite d'une fonction

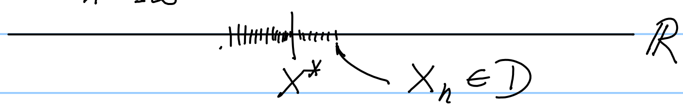
5.8. Motivation et définition

5.8.1. Motivation

$\boxed{\text{Dans ce chapitre } f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}; \ D \neq \emptyset.}$

Soit (x_n) une suite telle que $x_n \in D$ pour tout n et supposons que (x_n) converge :

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x^* \in \mathbb{R}.$$



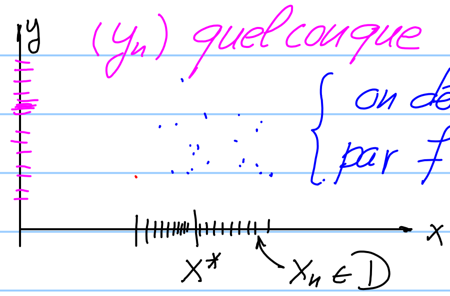
Remarque: x^* n'est pas forcément dans D

Exemple d'une telle situation: $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$, $D = \mathbb{R}^*$

(x_n), $x_n = \frac{1}{n} \in D$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0 \notin D$

Question: que peut-on dire de la suite (y_n), où $y_n = f(x_n)$ pour une fonction f quelconque ?

Réponse: rien du tout !



$\begin{cases} \text{on définit } f \\ \text{par } f(x_n) := y_n. \end{cases}$

Explication: donné une suite (x_n) telle que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ et (y_n) une suite quelconque on peut toujours définir une fonction f par $f(x_n) := y_n$.

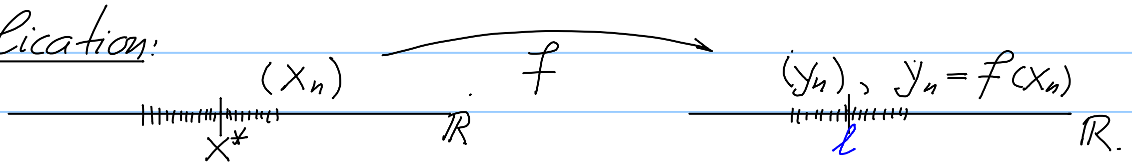
<u>On s'intéresse aux fonctions pour lesquelles <u>on peut</u> dire des choses</u>

vidéo 3

<u>5.8.2. Définition de la limite (épointée)</u>

<u>Définition</u> ("limite épointée" ou simplement "limite")
On dit qu'une fonction $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ admet pour limite épointée $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers x^*, si <u>pour toute</u> suite (x_n), $x_n \in D \setminus \{x^*\}$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, la suite (y_n), $y_n = f(x_n)$ converge et $\lim_{n\to\infty} y_n = \ell$

<u>Explication</u>:



il faut contrôler toutes les suites (x_n) telles que $x_n \in D \setminus \{x^*\}$ et telles que $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.

le même nombre ℓ pour toutes les suites (x_n) admises

<u>Notation</u>: si f admet pour <u>limite épointée</u> $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers x^* on écrit

$$\lim_{\substack{x\to x^* \\ x \neq x^*}} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to x^*} f(x) = \ell.$$

<u>Remarque importante</u> (si $x^* \in D(f)$)
La limite (la valeur de ℓ) peut être différente de $f(x^*)$, car on ne regarde jamais la valeur de f en x^* dans le calcul de la limite ℓ.

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 5

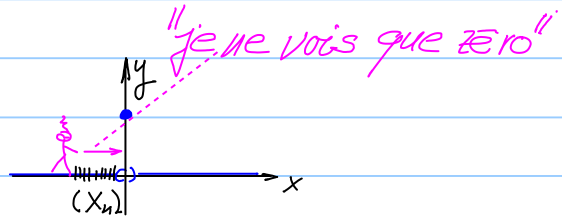
Limite d'une fonction

5.9 Exemples

vidéo A

5.9.1. Existence de la limite

1) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$



Soit $x^* = 0$ (à titre d'exemple).

Proposition: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0$

Démonstration: soit (x_n) une suite arbitraire telle que $x_n \neq 0$ et $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$. Alors $y_n = f(x_n) = 0$ pour tout n (car $x_n \neq 0$) et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n \to \infty} 0 = 0$.

Attention: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0 \neq \underbrace{f(0) = 1}$

la valeur de f en zéro est sans intérêt pour le calcul de la limite lorsque x tend vers zéro

2) $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, $p(x) = x^2 + 2x + 1$, $q(x) = x + 1$.

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Soit $x^* = -1$ (à titre d'exemple). Alors

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x\neq -1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x\neq -1}} \frac{x^2+2x+1}{x+1} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x\neq -1}} \frac{(x+1)^2}{(x+1)} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to -1\\ x\neq -1}} (x+1) = \lim_{n\to\infty} (x_n+1) =$$

définition de la limite

il faut contrôler toutes les suites (x_n) telles que $x_n \neq -1$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = -1$

$$= \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)}_{= -1 \text{ par définition de } (x_n)\,!} + 1 = -1+1 = 0$$

vidéo 3

5.9.2. Non existence de la limite

3) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $D = \mathbb{R}^*$.

Soit $x^* = 0$ (à titre d'exemple).

Proposition: f n'admet pas de limite en $x^* = 0$

Démonstration: (deux techniques équivalentes)

i) une suite (x_n) telle que (y_n) diverge

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi}, \ n\in\mathbb{N}, \quad x_n\neq 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

$$y_n = f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi\right) = (-1)^n \quad \text{cette suite diverge}$$

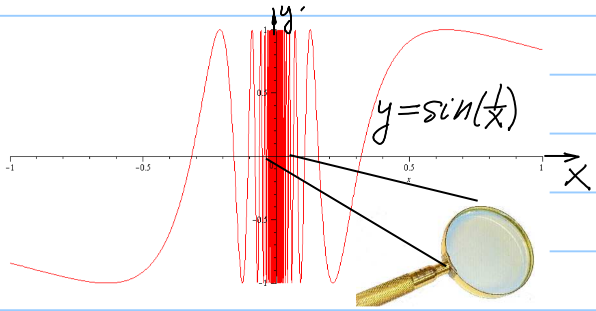
ii) deux suites (x_n), $(\tilde{x}_n)$ telles que (y_n) et $(\tilde{y}_n)$ convergent mais vers différentes limites

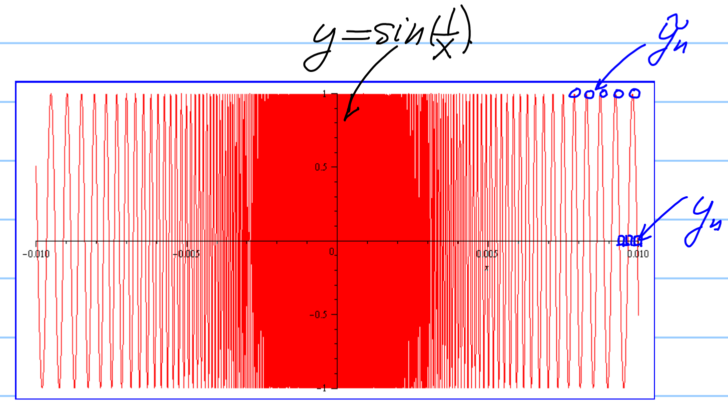
$$x_n = \frac{1}{2\pi n}, \ n\in\mathbb{N}^* \ ; \ \tilde{x}_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi}, \ n\in\mathbb{N}$$

on a $x_n \neq 0$, $\tilde{x}_n \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = 0$

$y_n = f(x_n) = \sin(2\pi n) = 0$, $\tilde{y}_n = f(\tilde{x}_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ mais $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{y}_n = 1$.





Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 5

Limite d'une fonction

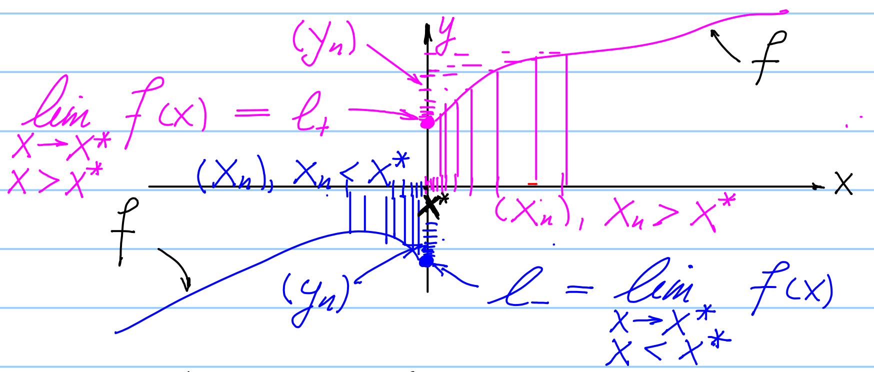
5.10. Limite épointée à droite et à gauche

Définition: on dit qu'une fonction $f: D \to \mathbb{R}$ admet pour limite épointée à droite (à gauche) $\ell_+ \in \mathbb{R}$ ($\ell_- \in \mathbb{R}$) lorsque x tend vers x^*, si pour toute suite (x_n), $x_n \in D$ telle que $x_n > x^*$ ($x_n < x^*$) et $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, la suite (y_n), $y_n = f(x_n)$ converge et $\lim_{n\to\infty} y_n = \ell_+$ ($\lim_{n\to\infty} y_n = \ell_-$).

Notations:

$$\lim_{x\to x^*_+} f(x) \equiv \lim_{\substack{x\to x^*\\ x>x^*}} f(x) = \ell_+ \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to x^*_-} f(x) \equiv \lim_{\substack{x\to x^*\\ x<x^*}} f(x) = \ell_- \in \mathbb{R}$$



par contre la limite $\lim_{\substack{x\to x^*\\ x\neq x^*}} f(x)$ n'existe pas.

Remarque: $$\lim_{\substack{x \to x^* \\ x > x^*}} f(x) = \ell_+ = \ell = \ell_- = \lim_{\substack{x \to x^* \\ x < x^*}} f(x)$$

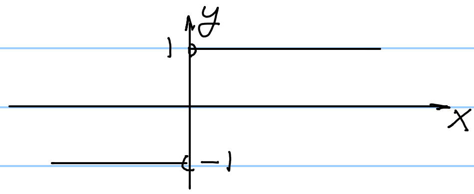
$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{\substack{x \to x^* \\ x \neq x^*}} f(x) = \ell.$$

Demonstration: "$\Leftarrow$" immédiat, "$\Rightarrow$" utilise tous les ingrédients

Montrer les détails !

Exemple: $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$, $D(f) = \mathbb{R}^*$



$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 1 = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (-1) = -1$$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 6

Fonctions continues

6.1 Opérations algébriques sur les limites

Dans cette section $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$.

Si $\lim\limits_{\substack{x \to x^* \\ \ulcorner x \neq x^* \\ x > x^* \\ x < x^* \lrcorner}} f(x) = a$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x^* \\ \ulcorner x \neq x^* \\ x > x^* \\ x < x^* \lrcorner}} g(x) = b$ $\qquad a, b \in \mathbb{R}$

Alors $\lim\limits_{\substack{x \to x^* \\ \ulcorner \vdots \lrcorner}} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{\substack{x \to x^* \\ \ulcorner \dots \lrcorner}} f(x) + \lim\limits_{\substack{x \to x^* \\ \ulcorner \dots \lrcorner}} g(x) = a + b$

$$\lim_{\substack{x \to x^* \\ \ulcorner \vdots \lrcorner}} (f(x) \cdot g(x)) = \Big(\lim_{\substack{x \to x^* \\ \ulcorner \vdots \lrcorner}} f(x)\Big) \cdot \Big(\lim_{\substack{x \to x^* \\ \ulcorner \vdots \lrcorner}} g(x)\Big) = a \cdot b.$$

$$\lim_{\substack{x \to x^* \\ \ulcorner \vdots \lrcorner}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{\substack{x \to x^* \\ \ulcorner \vdots \lrcorner}} f(x)}{\lim\limits_{\substack{x \to x^* \\ \ulcorner \vdots \lrcorner}} g(x)} = \frac{a}{b}, \text{ si } b \neq 0.$$

⌈le démontrer ! utiliser les lois algébriques pour les suites⌋

Exemple: $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x \neq 2}} (3x^2 - 2x + 5) = \; \dots \; =$

$$= 3 \cdot \Big(\underbrace{\lim_{\substack{x \to 2 \\ x \neq 2}} x}_{=2}\Big)^2 - 2 \Big(\underbrace{\lim_{\substack{x \to 2 \\ x \neq 2}} x}_{=2}\Big) + 5 = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 = 13$$

par définition de la limite

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 6

Fonctions continues

6.2. "Limites infinies" et comportement à $\pm\infty$

Attention: à partir de maintenant nous écrivons $\lim\limits_{x \to x^*} f(x)$ au lieu de $\lim\limits_{\substack{x \to x^* \\ x \neq x^*}} f(x)$.

Conventions:

1) $\lim\limits_{\boxed{x \to x^*}} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) veut dire que pour toute suite (x_n), $x_n \in D(f)$, $x_n \neq x^*$ telle que $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^* \in \mathbb{R}}$ on a $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty}$ (resp. $-\infty$)

Voir 3.6

2) $\lim\limits_{\boxed{x \to +\infty}} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ (resp. $+\infty$ ou $-\infty$) veut dire que pour toute suite (x_n), $x_n \in D(f)$, telle que $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty}$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$ (resp. $+\infty$ ou $-\infty$)

Voir 3.6

$\lim\limits_{\boxed{x \to -\infty}} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ (resp $+\infty$ ou $-\infty$) veut dire que pour toute suite (x_n), $x_n \in D(f)$, telle que $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty}$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$ (resp $+\infty$ ou $-\infty$)

Voir 3.6

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 6

Fonctions continues

6.3. Théorème des deux gendarmes pour les fonctions

Théorème : soient $f, g, h : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, et soit $x^* \in \mathbb{R}$ ou $x^* \in \{+\infty, -\infty\}$, tel que $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$ pour une suite (x_n), $x_n \in D$, $x_n \neq x^*$.

Supposons :

i) cas $x^* \in \mathbb{R}$: $\exists\, \varepsilon > 0$, tel que $\forall x \in D$
$$|x - x^*| \leq \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

cas $x^* = +\infty$: $\exists\, \varepsilon > 0$, tel que $\forall x \in D$
$$x > \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

cas $x^* = -\infty$: $\exists\, \varepsilon < 0$, tel que $\forall x \in D$
$$x < \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

ii) $\lim_{x \to x^*} f(x) = \lim_{x\to x^*} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Alors : $\lim_{x \to x^*} h(x) = \ell$

Démonstration (avec ε donné par i))

Soit (x_n) une suite dans D, $x_n \neq x^*$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.
Par définition de $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, il existe n_0, tel que $\forall n \geq n_0$, $|x_n - x^*| \leq \varepsilon$ (cas où $x^* \in \mathbb{R}$), $x_n \geq \varepsilon$ (cas où $x^* = +\infty$) $x_n \leq \varepsilon$ (cas où $x^* = -\infty$), et on a donc pour tout $n \geq n_0$:

$$\begin{array}{ccccc} f(x_n) & \leqslant & h(x_n) & \leqslant & g(x_n) \\ \text{par ii)}\Big\downarrow {\scriptstyle n\to\infty} & & \Big\downarrow {\scriptstyle n\to\infty} & & \text{par ii)}\Big\downarrow {\scriptstyle n\to\infty} \\ \ell & & \underbrace{\ell} & & \ell \end{array}$$

par le théorème des deux gendarmes pour les suites. $\lrcorner$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 6

Fonctions continues

6.4 Exemples

vidéo A

6.4.1 Fonctions algébriques (deux gendarmes)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}}_{=:h(x)}$$

<u>il suffit de considérer $x>0$</u> (pourquoi ?)

on a $\quad h(x) \leq \dfrac{x}{\sqrt{x^2}+x} = \dfrac{1}{2} =: g(x)$

et $\quad h(x) \geq \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+1}+x} = \dfrac{x}{x+1+x} = \dfrac{1}{2+\frac{1}{x}} =: f(x).$

on a donc

$$\frac{1}{2+\frac{1}{x}} \leq h(x) \leq \frac{1}{2} \qquad (x>0)$$

$$\underbrace{\frac{1}{2+\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{2}}, \qquad \underbrace{h(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{2}}, \qquad \frac{1}{2} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{2}.$$

utiliser la définition de la limite et le fait que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0$

pour toute suite (x_n) telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

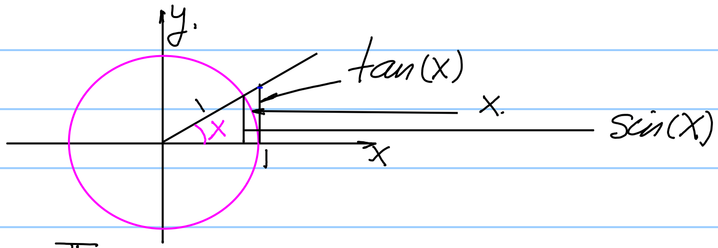
contrôler tous les détails pour une bonne compréhension !

par le théorème des deux gendarmes pour les fonctions

vidéo B

6.4.2. Fonctions trigonométriques (deux gendarmes)

Rappel



Pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ on a $0 \leq \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1 \quad (*)$, on peut supposer $|x| \leq \frac{\pi}{4}$.

$\cos(x)$ étant une fonction paire, il suffit de contrôler $x>0$:

$\lim\limits_{x\to 0+} \cos(x) = 1 \implies (*)$.

+, car $0 < x \leq \frac{\pi}{4}$

On a $1 \geq \cos(x) = +\sqrt{1-\sin(x)^2} \geq \sqrt{1-2\sin(x)^2+\sin(x)^4} =$

$= 1-\sin(x)^2 \geq 1-x^2$.

Donc, pour $0 < x \leq \frac{\pi}{4}$ $\quad 1 \geq \cos(x) \geq 1-x^2$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \geq & \cos(x) & \geq & 1-x^2 \\ \Big\downarrow {\scriptstyle x\to 0, \, x>0} & & \Big\downarrow {\scriptstyle x\to 0, \, x>0} & & \Big\downarrow {\scriptstyle x\to 0, \, x>0} \\ 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

Remarque: $\underbrace{\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \cos(x) = 1}_{(*)} \implies \lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$

$x_n = \frac{1}{n}$ est une suite particulière déjà contrôlée dans $(*)$.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\text{une fonction paire}} = 1 \quad (*)$.

une fonction paire, $(*) \iff \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$

pour $0 < x \leqslant \frac{\pi}{4}$ on a (il suffit de regarder ces x).

$$0 < \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$ | diviser par $\sin(x)$

$$\Longrightarrow \quad 1 \leqslant \frac{x}{\sin(x)} \leqslant \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1$$

| théorème des deux gendarmes.

$$\begin{array}{ccc} \cos(x) & \dfrac{\sin(x)}{x} & 1 \\ \downarrow{\scriptstyle x\to 0+} & \downarrow{\scriptstyle x\to 0+} & \downarrow{\scriptstyle x\to 0+} \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

3) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1-\cos(x)^2}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}\right) =$$

une fonction paire

lois algébriques

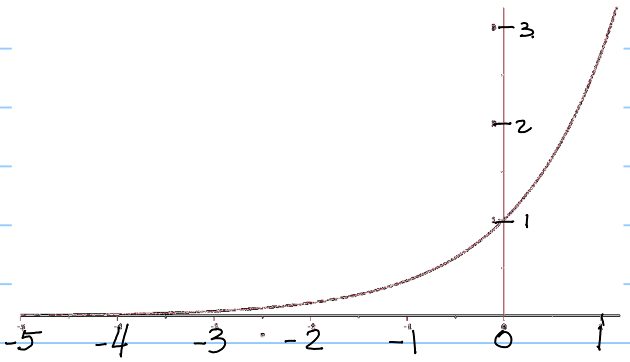
$$= \lim_{x\to 0+}\left(\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}\right) = \left(\lim_{x\to 0+}\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\lim_{x\to 0+}\cos(x)}$$

$$= 1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

vidéo C

6.4.3. Fonction exponentielle (changement de variables)

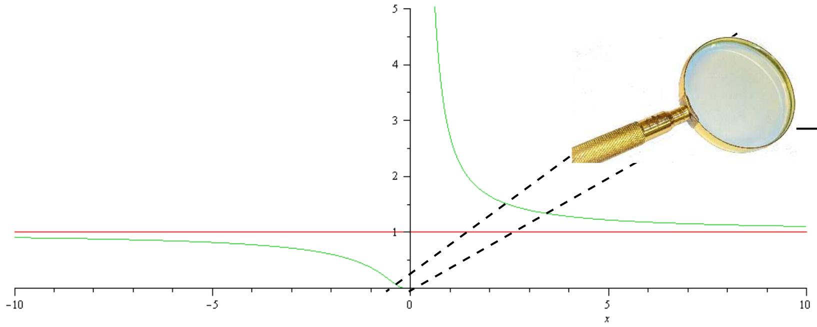
1)

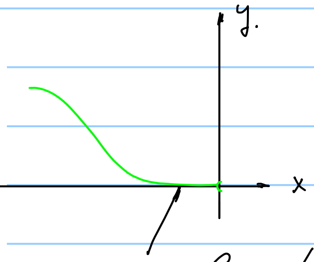


$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

2) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $D(f) = \mathbb{R}^*$





une fonction "très plate"
(à spécifier plus loin).

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{y\to +\infty} f\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to+\infty} e^{\frac{1}{\frac{1}{y}}} = \lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty.$$

par définition on teste les mêmes suites, c.-à-d. si (x_n) est telle que $x_n > 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ alors la suite (y_n), $y_n = \frac{1}{x_n}$ satisfait $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, et vice versa.

<u>de même:</u>

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{y\to-\infty} f\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{y\to 0+} e^y = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{y\to 0-} e^y = 1 \end{array}\right\}$$

voir plus loin, une conséquence de la continuité de e^y en $y=0$.

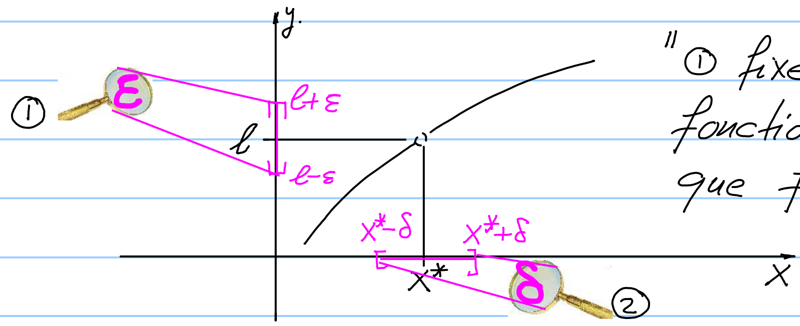
Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers la vidéo C	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 6

Fonctions continues

6.5. Définition de la limite épointée avec ε et δ

(Définition équivalente à la définition avec les suites)



"① fixe ε. ② ajuste δ (en fonction du choix de ε) de sorte que $f(x) \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ pour tout $x \in [x^*-\delta, x^*+\delta]$"

Définition: on dit qu'une fonction $f: D \to \mathbb{R}$ admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers x^*, si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in D$,

limite épointée $\quad x \neq x^*$

$$(0 < |x - x^*| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

$$(A \Rightarrow B)$$

Remarque: comme toujours, $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, et on suppose qu'il existe une suite (x_n), $x_n \in D$, $x_n \neq x^*$, telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Exemple: $f(x) = 2x$, $x^* := 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 =: \ell$.

A montrer: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $|f(x) - \ell| = |2x| \leq \varepsilon$ si $|x - x^*| = |x| \leq \delta$.

C'est le cas pour le choix $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$ (par exemple) car

$$|2x| = 2|x| \leq 2\cdot\delta = 2\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon\right) = \varepsilon$$

$$2\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 6

Fonctions continues

6.6. Démonstration (équivalence des définitions)

(équivalence avec la définition par les suites)

"$\Rightarrow$" définition avec ε et δ $\Rightarrow$ définition avec les suites

Soit (x_n) une suite telle que $x_n \in D(f)$, $x_n \neq x^*$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, et soit $y_n = f(x_n)$. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire et ℓ, δ donnés par la définition avec ε et δ. Alors, puisque $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0$ $|x_n - x^*| \leq \delta$. De plus on a $\forall n \geq n_0$ $|x_n - x^*| > 0$, car $x_n \neq x^*$, et on a donc par la définition avec ε et δ que $|y_n - \ell| \leq \varepsilon$ et donc, par la définition de la limite pour une suite, que $\lim_{n\to\infty} y_n = \ell$.

"$\Leftarrow$" définition avec les suites $\Rightarrow$ définition avec ε et δ

(démonstration par l'absurde) Supposons que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell \in \mathbb{R}$ pour toute suite (x_n), $x_n \in D(f)$, $x_n \neq x^*$, mais que $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall \delta > 0$, $\exists x$ tel que $0 < |x - x^*| \leq \delta$ et $|f(x) - \ell| > \varepsilon$. Alors, si pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$,) il existe x_n tel que $0 < |x_n - x^*| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - \ell| > \varepsilon$, en contradiction avec $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$. (Au lieu de $\delta_n = \frac{1}{n}$ on peut choisir n'importe quelle suite (δ_n), $\delta_n > 0$ telle que $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$

{on suppose donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \delta > 0$ il existe x tel que $\underbrace{(0 < |x - x^*| \leq \delta)}_{A}$ $\underbrace{\text{et}}_{\text{et}}$ $\underbrace{(|f(x) - \ell| > \varepsilon)}_{\neg B}$

car $(\neg(A \Rightarrow B)) \Leftrightarrow (A \text{ et } \neg B)$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 6

Fonctions continues

6.7. Limite épointée et composition des fonctions

Soit
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h = g\circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ x^* \arrow[u, phantom, "\cup"] & y^* \arrow[u, phantom, "\cup"] & \ell \arrow[u, phantom, "\cup"] \end{tikzcd}$$

Si $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to x^* \\ x\neq x^*}} f(x) = y^* \quad ①}$ et $\boxed{\lim\limits_{\substack{y\to y^* \\ y\neq y^*}} g(y) = \ell \quad ②}$

Alors (attention à la condition (*) !)

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to x^* \\ x\neq x^*}} g(f(x)) = \ell \quad ③}$$

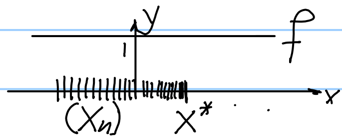
on suppose implicitement que $f(x_n) \neq y^*$ sur des suites (x_n)

pourvu que pour toute suite (x_n) telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$, $x_n \neq x^*$, il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0$ $y_n = f(x_n) \neq y^*$ (*)

Remarque: la condition (*) disparaîtra pour f, g des fonctions continues (à définir)

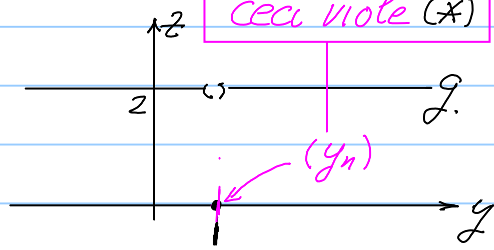
Contre-exemple (au théorème sans la condition (*)).

Soit $f(x) = 1$



et $g(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 1 \\ 2 & \text{si } y \neq 1 \end{cases}$

$y_n = f(x_n) = 1$
ceci viole (*)



Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = g(f(x)) = g(1) = 0$

Pour tout $x^* \in \mathbb{R}$ on a $\underbrace{y^* = \lim_{\substack{x \to x^* \\ x \neq x^*}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x^* \\ x \neq x^*}} 1 = 1}_{1}$

et $\underbrace{\lim_{\substack{y \to y^* \\ y \neq y^*}} g(y) = \lim_{\substack{y \to 1 \\ y \neq 1}} = \underset{\ell}{\overset{\shortparallel}{2}}}_{2}$, mais $\lim_{\boxed{\substack{x \to x^* \\ x \neq x^*}}} h(x) = \lim_{\substack{x \to x^* \\ x \neq x^*}} 0 = 0 \neq \ell$ $\square$

ici on viole $(*)$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 6

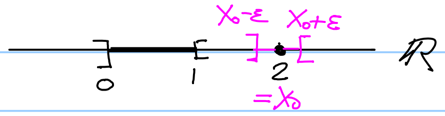
Fonctions continues

6.8. Définition (continuité)

Notation: A partir de maintenant nous écrivons x_0 au lieu de x^* pour les points qui nous intéressent

Définition: $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, est appelé un point isolé de D si $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap D = \{x_0\}$

Exemple: $D =]0,1[\cup \{2\}$



$x_0 = 2$ est un point isolé de D

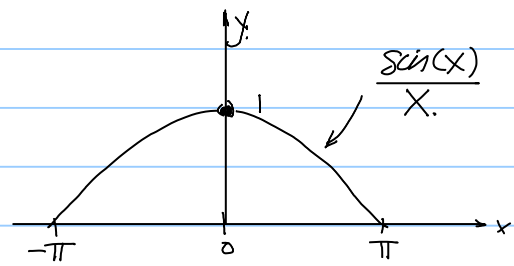
Définition: une fonction $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, est continue en $x_0 \in D$, si x_0 est un point isolé de D ou si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

deux informations: f admet une limite et la valeur de celle limite est $f(x_0)$.

Exemple 6.8

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

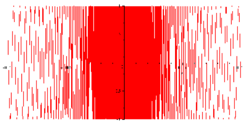


$f(x)$ est continue en 0, car $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0)$.

Ensembles de fonctions

①	②	③	④
$f : D \to \mathbb{R}$, f n'admet pas de limite en x_0	$f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \notin D$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$	$f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ $\supset$	$f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, $\ell = f(x_0)$

Exemples:



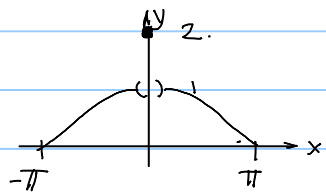
① i) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $D(f) = \mathbb{R}^*$, pas de limite en $x_0 = 0 \notin D(f)$

ii) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, pas de limite en $x_0 \in \mathbb{R}$.

② i) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, $D(f) = \mathbb{R}^*$, $x_0 = 0 \notin D(f)$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$

ii) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$, $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$.

③ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$



$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 \neq 2 = f(0)$

④ Exemple 6.8.

Remarque Si f est continue en $x_0 \in D$, alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$$

[Lien vers la vidéo correspondante]()	
[Lien vers le moteur de recherche du cours]()	

Chapitre 6

Fonctions continues

6.9. Définition de la continuité en un point par ε et δ

Voir aussi 6.5. (définition de la limite avec ε et δ).

Définition: on dit qu'une fonction $f: D \to \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in D$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in D$, $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

Remarque: si on remplace la condition "$|x-x_0| \leq \delta$" par "$0 < |x - x_0| \leq \delta$" c'est la définition de la limite avec ε et δ, avec ℓ remplacé par $f(x_0)$.

Remarque: la formulation sans le "$0 < \ldots$" donne aussi la continuité en des points isolés de D, sans que ça modifie la définition en les autres points de D.

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 6

Fonctions continues

6.10. Fonctions continues et prolongement par continuité

Définition (fonctions continues)

Une fonction $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ est dite continue ou continue sur D, si f est continue en tout $x_0 \in D$

Prolongement par continuité (voir Exemple 6.8)

Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, mais $x_0 \notin D(f) \equiv D$, alors on peut définir la fonction $\hat{f}_{x_0} : D \cup \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\hat{f}_{x_0}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in D \\ \ell = \lim_{x \to x_0} f(x) & \text{si} \quad x = x_0 \end{cases}$$

$\hat{f}_{x_0}$ est continue en x_0 par définition.

Remarque: Souvent on écrit de nouveau f au lieu de $\hat{f}_{x_0}$.

Exemples:

$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1$ — prolongement par continuité — $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1$

$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2^x$ — prolongement par continuité — $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 2^x$.

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 6

Fonctions continues

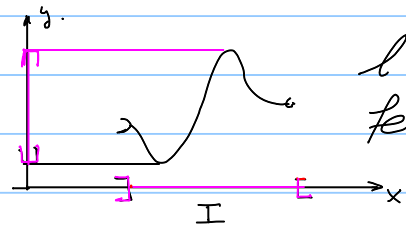
6.11. Fonctions continues sur un intervalle ouvert

Dans cette section on suppose $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $I =]a, b[\subset D$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, c'est-à-dire que la restriction de f à I est une fonction continue.

Rappel: soit $a \in \mathbb{R}$. Alors les intervalles non bornés
$]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$ sont ouverts
$]-\infty, a]$ et $[a, +\infty[$ sont fermés

Remarque 1: l'image $f(I)$ d'un intervalle ouvert I par une fonction f continue sur I est un intervalle, mais $f(I)$ n'est ni forcément ouvert ni forcément borné

Exemple

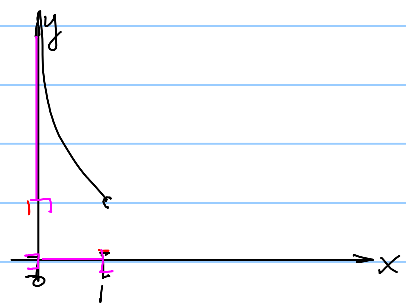


l'image est un intervalle fermé.

Remarque 2: l'image $f(I)$ d'un intervalle ouvert I par une fonction strictement monotone et continue sur I est un intervalle ouvert, mais $f(I)$ n'est pas forcément borné

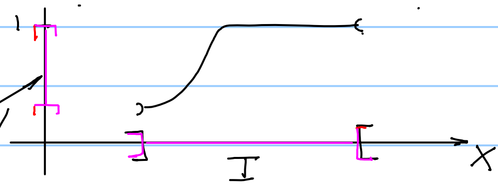
Exemples:

i) $f :]0, 1[\longrightarrow]1, \infty[$
$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}$



ii) attention, si f est monotone mais pas strictement monotone:

l'image n'est pas ouvert



Fonctions élémentaires

Remarque 3: la composition de deux fonctions continues est une fonction continue sur son domaine de définition (supposé non vide).

Définition: une fonction élémentaire est une fonction construite à partir de fonctions algébriques, exponentielles, logarithmiques, sinus et cosinus et un nombre fini d'opérations $+, \cdot, /, \circ$.

composition

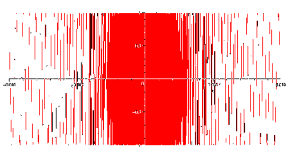
Théorème: une fonction élémentaire est continue sur son domaine de définition.

Conséquence: pour f une fonction élémentaire on a pour tout $x_0 \in D(f)$ que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Exemples

- $\lim_{x \to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$
- $\lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$ (utilisé en 6.4.3 2))
- $\lim_{x \to 0} \exp(\cos(\ln(\sqrt{\cosh(x)}))) = e^1 = e$
- $\lim_{x \to x_0} \sin(\frac{1}{x}) = \sin(\frac{1}{x_0})$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^*$

mais $\sin(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite en $x_0 = 0$.



Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 7

Fonctions continues et fonctions dérivables

7.1. Fonctions continues sur un intervalle fermé

Définition: une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ est <u>continue à droite</u> en $x_0 \in D$, si

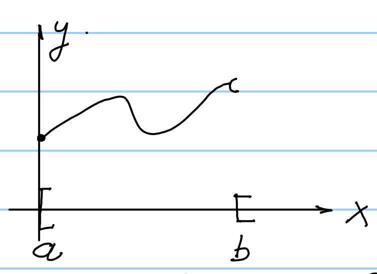
$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$$

et elle est <u>continue à gauche</u> en $x_0 \in D$, si

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$$

Remarque: ceci est équivalent à demander que les restrictions de f à, respectivement, $D_+ \equiv D \cap [x_0, +\infty[$ et $D_- \equiv D \cap]-\infty, x_0]$ soient des fonctions continues en x_0.

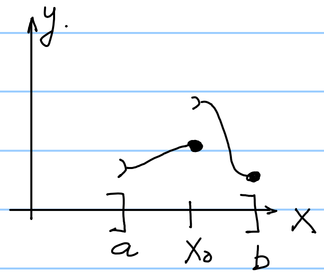
<u>Exemples</u>



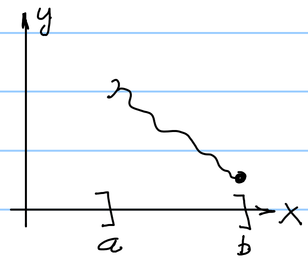
$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$

$\left(= \lim_{x \to a} f(x)\right)$

f continue à droite en a.



f continue à gauche en x_0 et en b, mais f n'est pas continue en x_0



$\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$

$\left(= \lim_{x \to b} f(x)\right)$

f continue à gauche en b.

Remarque: f continue en x_0 $\Leftrightarrow$ f continue à droite en x_0
<u>et</u> f continue à gauche en x_0

Démonstration: il suffit de bien comprendre les définitions

Remarque: une fonction $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ est donc continue sur $[a,b] \subset D$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$ si la restriction de f à $[a,b]$ est une fonction continue, ce qui revient à demander que f soit continue sur $]a,b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 7

Fonctions continues et fonctions dérivables

7.2. Minimum et maximum

Théorème 1: soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$. Toute fonction continue $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum, c.-à-d. il existe $c \in [a,b]$ et $d \in [a,b]$ tels que, pour tout $x \in [a,b]$,
$$\underbrace{f(c)}_{=:m} \leq f(x) \leq \underbrace{f(d)}_{=:M}.$$

Notation: $m := \min_{x \in [a,b]} f(x) \equiv \text{minimum } \mathrm{Im}(f) \in \mathbb{R}$

$M := \max_{x \in [a,b]} f(x) \equiv \text{maximum } \underbrace{\mathrm{Im}(f)}$ $\in \mathbb{R}$

l'ensemble image de $f \equiv f([a,b]) \subset \mathbb{R}$

Démonstration

i) Soit (x_n) une suite, $x_n \in [a,b]$. C'est une suite bornée, et il existe donc par le théorème de Bolzano–Weierstrass une sous-suite $(\tilde{x}_k)$, $\tilde{x}_k := x_{n_k}$ qui converge, c'est-à-dire telle que $\lim_{k\to\infty} \tilde{x}_k = x^* \in \mathbb{R}$. Vu que $\forall k$, $a \leq \tilde{x}_k \leq b$,

il s'ensuit que $x^* \in [a,b]$ (voir 3.11, iii).

ii) $f([a,b])$ est un ensemble borné : sinon il existe une suite (x_n), $x_n \in [a,b]$ telle que $|f(x_n)| \geq n$. Par i) il existe une sous-suite $(\tilde{x}_k)$, $\tilde{x}_k := x_{n_k}$, telle que $\lim_{k\to\infty} \tilde{x}_k = x^* \in [a,b]$. Puisque f est continue en x^* on a $\lim_{k\to\infty} f(\tilde{x}_k) = f(\lim_{k\to\infty} \tilde{x}_k) = f(x^*) \in \mathbb{R}$, en

démonstration par l'absurde

contradiction avec $|f(\tilde{x}_k)| \geq n_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$.

iii) <u>soit $M := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$</u> $\in \mathbb{R}$ (car $f([a,b])$ majoré)
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M$
(définition du sup). La suite $(f(x_n))$ satisfait donc
$|M - f(x_n)| \leq \frac{1}{n}$, ce qui par définition de la limite
veut dire que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$. Par i) on peut
extraire de la suite (x_n) une sous-suite $(\tilde{x}_k)$
telle que $\lim_{k\to\infty} \tilde{x}_k = x^* \in [a,b]$ et on a que
$f(x^*) = M$, car par la continuité de f en x^* on a
$f(x^*) = f(\lim_{k\to\infty} \tilde{x}_k) = \lim_{k\to\infty} f(\tilde{x}_k) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = M$.

La démonstration pour m est analogue $\lrcorner$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 7

Fonctions continues et fonctions dérivables

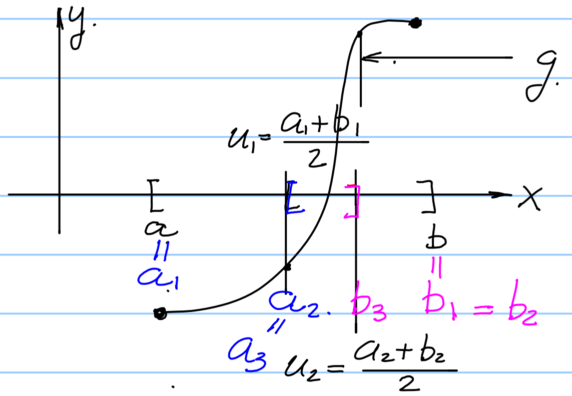
7.3. Méthode de la bissection (≡ méthode de dichotomie)

7.3.1. Proposition et démonstration

vidéo A

Proposition : Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, telle que $g(a)<0$ et $g(b)>0$. Alors il existe $u \in \,]a,b[$ tel que $g(u)=0$.

Démonstration



On pose $a_1 = a$, $b_1 = b$ et puis on définit pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

et puis : si $g(u_n) < 0$: $a_{n+1} = u_n$, $b_{n+1} = b_n$
si $g(u_n) > 0$: $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = u_n$
si $g(u_n) = 0$: "STOP", $u_n =: \underline{u \in \,]a,b[}$

Dans le cas où $\forall n$, $g(u_n) \neq 0$ on obtient de cette manière une suite croissante (a_n) et une suite décroissante (b_n) telles que

$$\forall n, \; a_n \leq b_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0 \qquad (*)$$

$$\forall n, \quad g(a_n) \leq 0 \leq g(b_n).$$

De (*) il suit (voir 3.11. Bon à savoir) que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: u \in]a,b[.$$

Puisque la fonction g est continue sur $[a,b]$ elle est continue en u et donc

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = \lim_{n\to\infty} g(b_n) = g(\lim_{n\to\infty} a_n) = g(\lim_{n\to\infty} b_n) = g(u)$$

et on obtient avec le théorème des deux gendarmes:

$$\begin{array}{ccccc} g(a_n) & \leq & 0 & \leq & g(b_n) \\ \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & & & \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\ g(u) & \leq & 0 & \leq & g(u) \end{array} \quad \Longrightarrow g(u) = 0. \qquad \square$$

vidéo B

7.3.2. Exemple

Soit $g(x) = x^2 - 2$, $g: [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(1) = 1^2 - 2 = -1 < 0$, $g(2) = 2^2 - 2 = 2 > 0$

$a_1 = 1$, $b_1 = 2$: $u_1 = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}$, $g(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4} > 0$ $\Rightarrow$ $a_2 = 1$, $b_2 = \frac{3}{2}$

$u_2 = \frac{1}{2}(1 + \frac{3}{2}) = \frac{5}{4}$; $g(\frac{5}{4}) = \frac{25}{16} - \frac{32}{16} = -\frac{7}{16} < 0$ $\Rightarrow$ $a_3 = \frac{5}{4}$ etc., $b_3 = \frac{3}{2}$ etc.

$$\Rightarrow \underset{\substack{\| \\ 1.25}}{\frac{5}{4}} < \underset{\substack{\uparrow \\ u}}{\sqrt{2}} < \underset{\substack{\| \\ \frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$g(\sqrt{2}) = 0.$

Avantage : la convergence est guarantie

Désavantage : la convergence est seulement linéaire.

En effet on a que $u \in [a_n, b_n]$ et la longueur de cet intervalle est $\frac{b-a}{2^{n-1}}$, ce qui implique que

$$\ln\left(\frac{b-a}{2^{n-1}}\right) = \ln(2(b-a)) - \overset{\text{linéaire en } n}{n \ln(2)}$$

Ceci signifie que le nombre de décimales correctes augmente linéairement (la méthode de Newton introduite dans 3.10. converge quadratiquement : le nombre de décimales correctes se double à chaque itération).

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 7

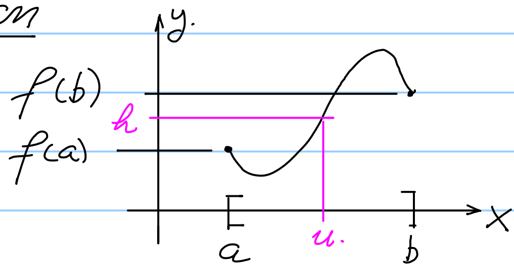
Fonctions continues et fonctions dérivables

7.4. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2 (théorème des valeurs intermédiaires).
Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Toute fonction continue $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ prend (au moins une fois) toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$.

Remarque 7.4 ceci montre en particulier que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. (le démontrer !)

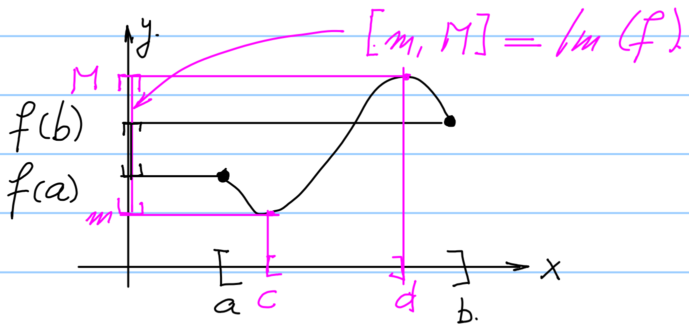
Démonstration



Supposons que $f(a) \le f(b)$. Soit $h \in [f(a), f(b)]$ et montrons qu'il existe $u \in [a,b]$ tel que $f(u) = h$.
Le cas où $h = f(a)$ ou $h = f(b)$ est trivial (choisir $u = a$ ou $u = b$). Soit donc $f(a) < f(b)$ et $h \in]f(a), f(b)[$. On pose alors $g(x) = f(x) - h$.
La fonction g est continue sur $[a,b]$, $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$ et par la méthode de bissection il existe donc $u \in]a,b[$ tel que $g(u) = 0$ $\Leftrightarrow$ $f(u) = h$. Dans le cas où $f(a) > f(b)$ on choisit $h \in]f(b), f(a)[$ et pose $g(x) = h - f(x)$ avec les mêmes conclusions. $\square$

Théorème 3 : soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$. Alors $\mathrm{Im}(f) = [m, M]$, où m est le minimum et M le maximum de f sur $[a,b]$.

Démonstration



Par le théorème 1 il exisle $c, d \in [a,b]$, tels que $f(c) = m$ et $f(d) = M$. Si $m = M$ on a que pour tout $x \in [a,b]$ $f(x) = m = M$ et le théorème est démontré. Si $c < d$ (resp. $c > d$) on restraint f à l'intervalle $[c,d]$ (resp. $[d,c]$) et puis on utilise le théorème 2 pour $h \in]m, M[$.

Remarque : par la remarque 7.4 on sait que l'image de f est un intervalle ce qui implique directement que $\mathrm{Im}(f) = [m, M]$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 7

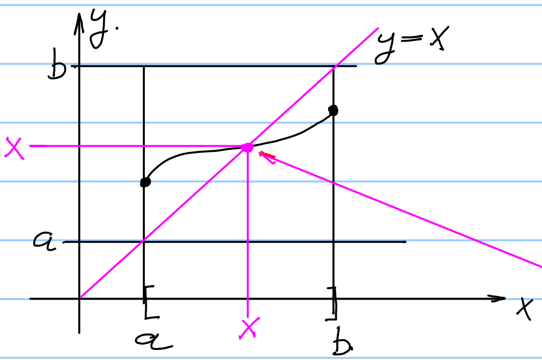
Fonctions continues et fonctions dérivables

7.5 Application aux suites définies par récurrence

Définition: une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ admet $x \in D$ comme point fixe si $f(x) = x$.

Théorème (du point fixe): soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Toute fonction continue $f : [a,b] \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset [a,b]$ admet un point fixe.



$\mathrm{Im}(f) = [m, M] \subset [a,b]$.

point fixe de f

Démonstration

La fonction $g(x) = x - f(x)$ est continue sur $[a,b]$, $g(a) \leq 0$ et $g(b) \geq 0$ et par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x \in [a,b]$ tel que $g(x) = 0 \iff f(x) = x$.

Remarque: pour les suites définies par récurrence par une fonction continue, ce théorème permet d'identifier les limites éventuelles

Contrôler tous les cas

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 7

Fonctions continues et fonctions dérivables

7.6. Définition (dérivable)

Dans cette section, sauf si indiqué autrement, $f : D \to \mathbb{R}$, et $x_0 \in]a, b[\subset D \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Définition: (dérivable) une fonction f est dérivable en x_0 si f admet la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: d \quad \in \mathbb{R}, \qquad (*)$$

c'est-à-dire si cette limite existe.

Notation: on écrira $d|_{x_0}$ s'il est nécessaire de garder une trace du point x_0.

Terminologie: le nombre $d|_{x_0}$ est appelé la dérivée de f en x_0.

Remarque:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{\text{poser } x = x_0 + h}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Remarque: si f est continue en x_0 on a que

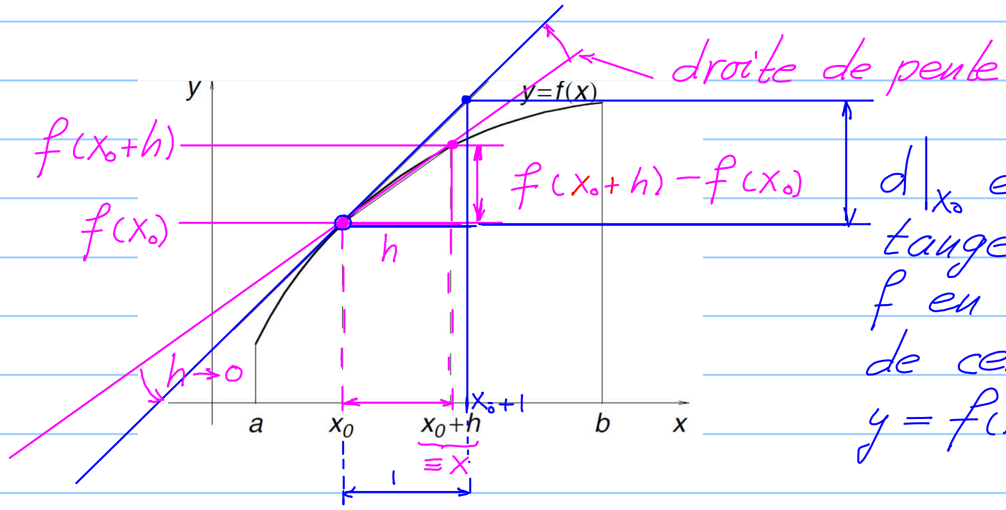
$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = \left(\lim_{x \to x_0} f(x) \right) - f(x_0) = 0 \qquad (**)$$

mais $(**)$ est moins restrictif que $(*)$. Voir 7.10

Exemple: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = 1.$

La fonction $\sin(x)$ est donc dérivable en $x_0 = 0$ et sa dérivée vaut $d = 1$.

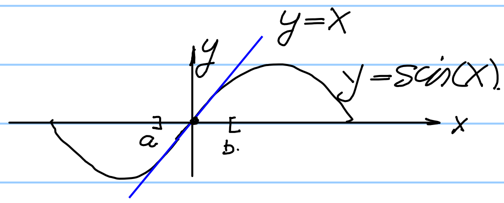
Interprétation géométrique



$d|_{x_0}$ est la pente de la tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$. L'équation de cette tangente est:

$y = f(x_0) + d|_{x_0} \cdot (x - x_0)$.

Exemple:



Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 7

Fonctions continues et fonctions dérivables

7.7. Définition (différentiable)

Définition (différentiable) : une fonction f est différentiable en x_0, s'il existe un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ et une fonction $r:]a,b[\to \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in]a,b[$.

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \alpha \cdot (x - x_0)}_{\text{l'équation de la tangente}} + r(x) \qquad (*)$$

avec

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0 \qquad (**)$$

Remarque: $(*) \Leftrightarrow f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha \cdot h + r(x_0 + h)$

$$(**) \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{r(x_0 + h)}{h} = 0$$

Remarque 7.7. (représentation du reste)

Par $(*)$ $r(x_0) = 0$, et par $(**)$ $r(x)$ est dérivable en x_0 avec dérivée zéro:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{r(x) - r(x_0)}{x - x_0} = 0$$

La fonction

$$R(x) := \begin{cases} \dfrac{r(x)}{x - x_0} & , \ x \in]a,b[\setminus \{x_0\} \\ 0 & , \ x = x_0 \end{cases}$$

est donc continue en x_0 et on obtient que

$$r(x) = R(x)(x - x_0) \qquad (***)$$

avec R une fonction continue en x_0 et $R(x_0) = 0$.

<u>Remarque</u> : $(***) \iff r(x_0+h) = R(x_0+h) \cdot h$

avec $\lim\limits_{h \to 0} R(x_0+h) = R(x_0) = 0$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 7

Fonctions continues et fonctions dérivables

7.8. Dérivable $\Leftrightarrow$ différentiable

Démonstration:

"$\Rightarrow$" Supposons que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = d$

On choisit $\alpha = d$ et on montre que $r(x)$ défini par $(*)$ satisfait $(**)$. De $(*)$ on a (avec $\alpha = d$)

$$r(x) = f(x) - f(x_0) - d \cdot (x - x_0)$$

et donc, pour $x \neq x_0$:

$$\frac{r(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - d$$

et donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x-x_0} = \left(\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right) - d = d - d = 0$$

ce qui montre que f est différentiable en x_0 avec $\alpha = d$.

"$\Leftarrow$" Supposons que f est différentiable (avec α)

De $(*)$ et $(***)$ on obtient pour $x \neq x_0$ que

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \alpha + R(x).$$

et donc, comme R est continue en x_0 et $R(x_0)=0$, on obtient que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \alpha$$

ce qui montre que f est dérivable en x_0 avec $d=\alpha$ $\lrcorner$

Exemple: $\sin(x)$ est dérivable en $x_0=0$ et donc différentiable. On a donc

voir 7.6

$$\sin(x) = \sin(0) + \underbrace{1}_{=\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1} \cdot (x-0) + R(x)\cdot(x-0)$$
$$= 0 + x + R(x)\cdot x$$
$$= x + R(x)\cdot x$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} R(x) = 0$

Remarque: on récupère facilement la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 + \lim_{x \to 0} R(x) = 1$$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 7

Fonctions continues et fonctions dérivables

7.9. La fonction dérivée

Définition: on dit que $f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $]a,b[\subset D$, si f est dérivable en tout point $x_0 \in]a,b[$.

Définition: soit f une fonction dérivable sur $]a,b[$. Alors on peut définir la fonction f' appelée la dérivée de f par

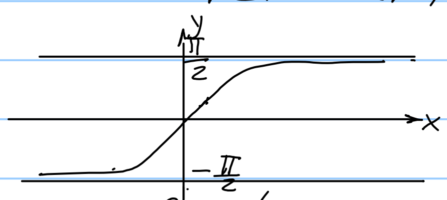
$$f'(x) := d\Big|_x \equiv \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Attention ! ne pas confondre la dérivée de f en un point x_0 (un nombre !) avec la dérivée de f (la fonction f').

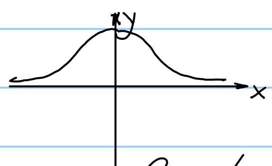
Définition: (fonction dérivée d'ordre n) si la fonction f' est dérivable sur $]a,b[$ on peut définir la fonction f'' appelée la deuxième dérivée de f par $f''(x) = (f')'(x)$ et puis par récurrence, si la $(n-1)$-ème dérivée de f est dérivable sur $]a,b[$ la fonction $f^{(n)}$ (la n-ème dérivée de f) par $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$, $n = 2,3,\dots$

Exemples (sans démonstration, à savoir par cœur)

	f	f'	$f^{(n)}$, $n=2,3,\dots$
	1	0	0
	x	1	0
$m\in\mathbb{N}^*$	x^m	$m\cdot x^{m-1}$	$m(m-1)\dots(m-n+1)\,x^{m-n}$, $n\le m$; 0, $n>m$
$p\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$	x^p, $x>0$	$p\cdot x^{p-1}$	$p(p-1)\dots(p-n+1)\,x^{p-n}$
	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\sin(x) & n \text{ pair}\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos(x) & n \text{ impair}\end{cases}$
	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}}\cos(x) & n \text{ pair}\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin(x) & n \text{ impair}\end{cases}$
	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\begin{cases}\sinh(x) & n \text{ pair}\\ \cosh(x) & n \text{ impair}\end{cases}$
	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\begin{cases}\cosh(x) & n \text{ pair}\\ \sinh(x) & n \text{ impair}\end{cases}$
	$\lvert x\rvert$, $x>0$	1	0
	$\lvert x\rvert$, $x<0$	-1	0
$x\in\mathbb{R}^*$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\frac{1}{x}$	$(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$
	e^x	e^x	e^x
	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	pas nécessaire



une fonction impaire



une fonction paire

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 7

Fonctions continues et fonctions dérivables

7.10. Dérivabilité (en un point) implique continuité (en ce point)

Théorème: une fonction qui est $\underbrace{\text{dérivable en } x_0}_{A}$ est $\underbrace{\text{continue en } x_0}_{B}$

$A \Rightarrow B$

Démonstration:

pourquoi ?

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,(x-x_0)\right)$$

pourquoi ?

$$= \underbrace{\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)}_{=d \text{ par } A}\underbrace{\left(\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\right)}_{=0}$$

$$= d\cdot 0 = 0.$$

donc $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

La réciproque du théorème $(B \Rightarrow A)$ est fausse !

Contre-exemple: $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$

f est continue en x_0: $\lim_{x\to 0+}|x| = \lim_{x\to 0+} x = \lim_{x\to 0} x = 0$

$\lim_{x\to 0-}|x| = \lim_{x\to 0-}(-x) = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$

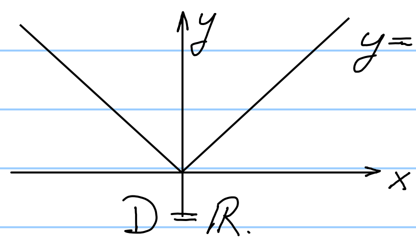
même valeur.

On a donc $\lim_{x\to 0}|x| = 0 = |0| = f(0)$.

f n'est pas dérivable en 0

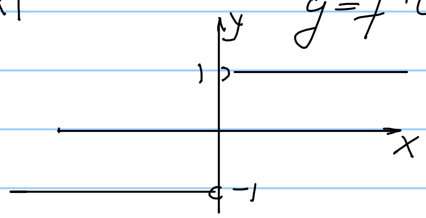
$$\lim_{x\to 0+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{(-x)}{x} = \lim_{x\to 0-}(-1) = -1 \neq 1. \quad \lrcorner$$



$y=f(x)=|x|$

$D=\mathbb{R}$.



$y=f'(x)=\text{sign}(x)$

pour $x\in\mathbb{R}^*$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 7

Fonctions continues et fonctions dérivables

7.11. Intervalles fermés

vidéo A

7.11.1. Définitions et remarques

Definition: une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable à droite (à gauche) en $x_0 \in [a,b[\subset D$ (en $x_0 \in]a,b] \subset D$) si f admet la limite

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = d_+ \in \mathbb{R} \quad \text{(dérivée à droite)}$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = d_- \in \mathbb{R} \quad \text{(dérivée à gauche)}$$

Remarque: f dérivable en $x_0 \in]a,b[\Leftrightarrow f$ dérivable à droite en x_0 et f dérivable à gauche en x_0 et les dérivées à gauche et à droite sont égales.

Definition: une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $[a,b] \subset D$ si f est dérivable sur $]a,b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

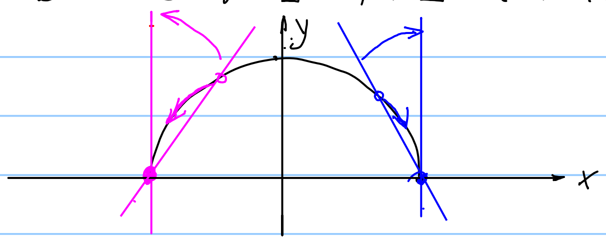
Remarque: si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$, c'est-à-dire si le domaine de définition de f est un intervalle fermé

alors la limite de $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ à droite en a est égale à la limite en a et pour cette raison nous écrivons dans ce cas f'(a) pour la dérivée à droite en a et de même f'(b) pour la dérivée à gauche en b.

vidéo B

7.11.2. Un contre-exemple

La fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ (mais pas sur $[-1,1]$!).
(le montrer !)



De plus

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \infty \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\infty$$

vérifier !

Challenge du jour

Comprendre géométriquement (faire des dessins !) la différence entre les calculs de ces deux limites et les deux limites

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x).$$

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 7

Fonctions continues et fonctions dérivables

7.12. Opérations algébriques pour les dérivées

Soient $f, g :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ des fonction dérivables sur $]a,b[$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \qquad \text{sur }]a,b[$$

$$(f \cdot g)' = f' g + f \cdot g' \qquad \text{sur }]a,b[$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{f'}{g} - f \cdot \frac{g'}{g^2} \qquad \text{sur } \{x \in]a,b[: g(x) \neq 0\}$$

Exemple: soit $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n$ et

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

alors

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k \cdot x^{k-1} \underset{k=\ell+1}{=} \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{\ell+1} (\ell+1) x^{\ell}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} (k+1) x^k$$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

vidéo A

Chapitre 8

La fonction dérivée

8.1. Dérivée de la composition de deux fonctions

8.1.1. Théorème

$$
\begin{tikzcd}
]a,b[\arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] &]c,d[\arrow[r, "g"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

$\quad\;\; \Psi \qquad\qquad\qquad \Psi$

$\quad\;\; x_0 \qquad\qquad\quad y_0 = f(x_0).$

f dérivable ($=$ différentiable) en x_0 ①

g dérivable ($=$ différentiable) en y_0 ②

hypothèses

Théorème: (dérivation en chaîne)

$$\boxed{(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)}$$

Ceci se généralise par récurrence (exemples):

$f(x) = \cos\left(\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right) \quad , \quad D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = -\sin\left(\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right)\cdot \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot(2x), \quad D(f') = \mathbb{R}$

$$f(x) = (1+x^2)^{(1+x^2)} = e^{(1+x^2)\ln(1+x^2)}$$

$$f'(x) = e^{(1+x^2)\ln(1+x^2)}\left(2x\cdot\ln(1+x^2) + (1+x^2)\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

$$= (1+x^2)^{(1+x^2)}\; 2x\,\left(1+\ln(1+x^2)\right)$$

vidéo B

8.1.2. Démonstration du théorème

Par hypothèse on a :

$$① \Leftrightarrow f(x_0+h) = \underbrace{f(x_0)}_{=y_0} + \underbrace{f'(x_0)h + r_1(x_0+h)}_{=:k(h)\equiv k}, \quad \lim_{h\to 0} \frac{r_1(x_0+h)}{h} = 0$$

$$② \Leftrightarrow g(y_0+k) = g(y_0) + g'(y_0)k + r_2(y_0+k), \quad \lim_{k\to 0} \frac{r_2(y_0+k)}{k} = 0$$

La remarque 7.7. nous dit :

$$③ \; r_2(y_0+k) = R_2(y_0+k)\cdot k \quad \text{avec}$$

$R_2(y_0+k)$ continue en y_0 et $R_2(y_0)=0$

On veut montrer que :

$$④ \; (g\circ f)(x_0+h) = (g\circ f)(x_0) + \boxed{g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)}\, h + r(x_0+h)$$

$$\text{avec} \quad \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} r(x_0+h) = 0$$

Si on substitue ① dans ② on obtient :

$$(g\circ f)(x_0+h) = g(f(x_0+h)) = g(\underbrace{f(x_0)}_{=y_0} + \overset{f'(x_0)h + r_1(x_0+h)}{k})$$

$$= g(\underbrace{f(x_0)}_{=y_0}) + g'(\underbrace{f(x_0)}_{=y_0})\underbrace{k}_{=f'(x_0)h + r_1(x_0+h)} + r_2(\underbrace{f(x_0)}_{=y_0} + k)$$

$$= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))f'(x_0)h + r(x_0+h)$$

$$\text{où} \quad r(x_0+h) = g'(f(x_0))\, r_1(x_0+h) + r_2(y_0+k)$$

$$⑤ \; \lim_{h\to 0} \frac{r(x_0+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(g'(f(x_0))\frac{r_1(x_0+h)}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(R_2(y_0+k)\frac{k}{h}\right) = 0$$

car $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r_1(x_0+h)}{h} = 0$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{k}{h} = f'(x_0)$ et

$\lim\limits_{h\to 0} R_2(y_0+k) = R_2(y_0) = 0$ car R_2 continue en y_0 $\square$

<u>Grand finale</u> : pourquoi avons-nous rappelé dans la dernière ligne que R_2 est par définition continue en y_0 ? Pourquoi $\lim\limits_{k\to 0} R_2(y_0+k)$ ne suffit pas ?

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 8

La fonction dérivée

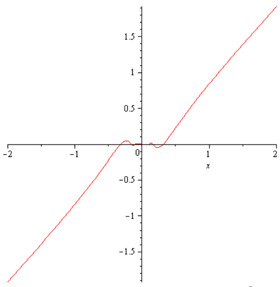
8.2. Continuité de la fonction dérivée

8.2.1. Un contre-exemple

vidéo A

La fonction f' n'est pas nécessairement continue

Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$



$D(f) = \mathbb{R}$, f impaire, f continue sur $\mathbb{R}$. En fait

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ ($\Rightarrow f$ est continue sur $\mathbb{R}$)

i) pour $x \neq 0$ on a

$$f'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{-1}{x^2}$$

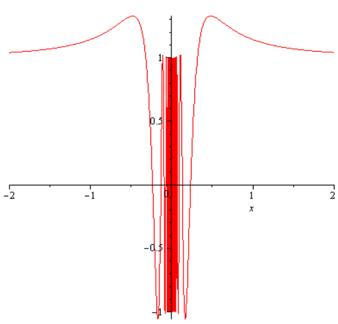
ii) pour $x = 0$ on a (utiliser la définition)

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)\right) = 0 \quad \text{(par les deux gendarmes)}$$

i) + ii) $\Rightarrow D(f') = \mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$



Proposition: f' n'est pas continue en $x=0$

Démonstration: soit $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

① $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{2\pi n}\underbrace{\sin(2\pi n)}_{=0} - \underbrace{\cos(2\pi n)}_{=1}\right) = -1 \neq 0 = f'(0)$

Proposition: f' n'admet pas de limite en $x=0$.

Démonstration: soit $x_n = \frac{1}{2\pi n+\pi}$, $n \in \mathbb{N}$

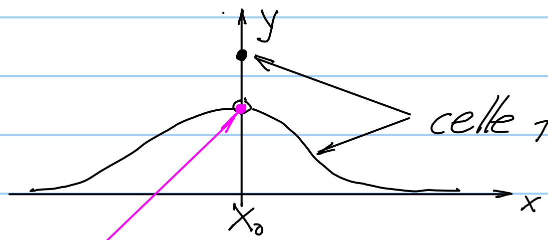
① et ② différent

② $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{2\pi n+\pi}\underbrace{\sin(2\pi n+\pi)}_{=0} - \underbrace{\cos(2\pi n+\pi)}_{=-1}\right) = 1 \neq -1$

vidéo B

8.2.2. Existence de la limite implique la continuité

La fonction f' n'est pas une fonction quelconque



cette fonction n'est pas possible comme dérivée d'une fonction f

si c'est le graphe d'une fonction dérivée, la valeur en x_0 est là

Théorème 8.2. Soit $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[\subset D$, $a<b$, f continue sur $]a,b[$, dérivable sur $]a,b[\setminus\{x_0\}$. S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \ell \quad (A)}$ alors f est dérivable en x_0 et $\boxed{f'(x_0) = \ell \quad (B)}$

Démonstration: voir plus loin. Utilise le théorème des accroissements finis généralisé.

<u>Attention à la logique</u> : dans l'exemple dans 8.2.1 f' n'admet pas de limite en $x_0 = 0$. Néanmoins f est dérivable en $x_0 = 0$. C'est un contre-exemple à $\underbrace{\text{la contraposée de}}_{\neg A \Rightarrow \neg B}$ $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\text{la réciproque}}_{B \Rightarrow A}$ du $\underbrace{\text{théorème 8.2}}_{A \Rightarrow B}$

<u>par le contre-exemple : faux</u> faux vrai

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 8

La fonction dérivée

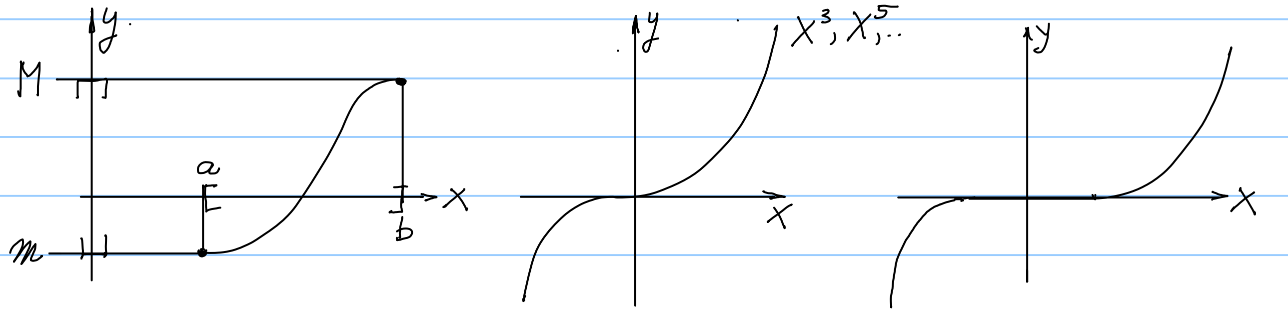
8.3. Fonctions réciproques

vidéo A

8.3.1. Continuité de la fonction réciproque

Critère: toute fonction strictement monotone est injective

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \gtrless f(x_2)$ donc $f(x_1) \neq f(x_2)$



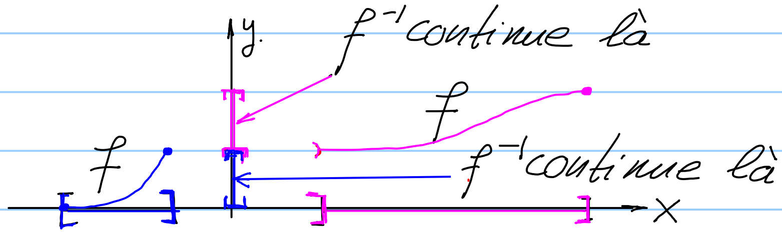
strictement monotone — strictement monotone — monotone, mais pas strictement.

Continuité de la fonction réciproque

Rappel: si une fonction $f: D(f) \to \operatorname{Im}(f)$ est injective, alors elle est bijective et on a la fonction réciproque $f^{-1}: \operatorname{Im}(f) \to D(f)$.

Théorème: la réciproque d'une fonction bijective continue est continue sur l'image de tout intervalle.

Explication:



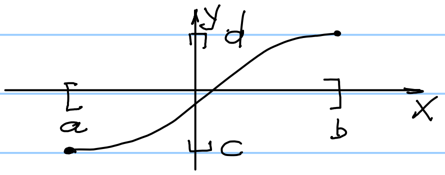
Démonstration: "laborieuse", utilise que l'image d'un intervalle est un intervalle et la définition de la continuité.

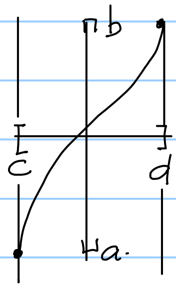
vidéo B

8.3.2. Dérivabilité de la fonction réciproque

Théorème: La réciproque d'une fonction bijective, dérivable est dérivable sur l'image de tout intervalle I tel que $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$

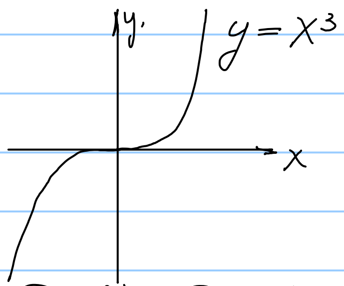
Explication

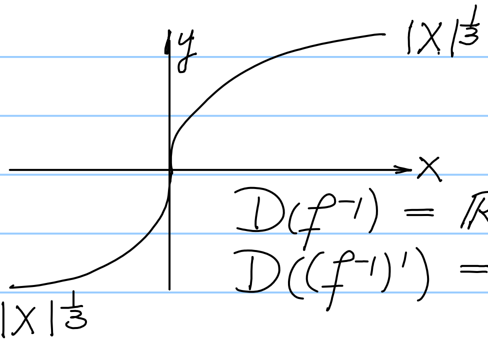




$D(f^{-1}) = [c,d]$
f^{-1} continue sur $[c,d]$
$D((f^{-1})') =]c,d[$

$D(f) = D(f') = [a,b]$
$f'(a) = f'(b) = 0$





$D(f^{-1}) = \mathbb{R}$
$D((f^{-1})') = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$D(f) = D(f') = \mathbb{R}$
attention: $f'(0) = 0$

vidéo C

8.3.3. Identité pour $(f^{-1})'$

Théorème: Soit I un intervalle, $I \neq \phi$, $f: I \to Im(f) \subset \mathbb{R}$ bijective, dérivable, $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$. Alors

$$\forall y \in Im(f) = D(f^{-1}), \quad \boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

Démonstration: Soit $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$

On a donc : $\forall y \in D(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f)$, $f(f^{-1}(y)) = y$

Par dérivation en chaîne on obtient

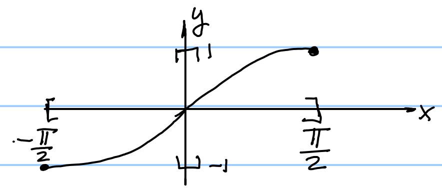
$\forall y \in \mathrm{Im}(f)$, $f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1$ dérivée de y

Exemples:

1) $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} = D(f)$.

$f^{-1}(x) = \ln(x)$, $\mathrm{Im}(f) = D(f^{-1}) =]0, \infty[$

$\forall x \in D(f^{-1}) =]0,\infty[$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{e^{\ln(x)}} = \dfrac{1}{x}$

2) 

$f(x) = \sin(x)$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$f'(x) = \cos(x) \neq 0$ si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(\arcsin(x))^2}}$$

$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin(x)^2}$ si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

et donc, $\forall x \in]-1, 1[= \sin(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers la vidéo C	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 8

La fonction dérivée

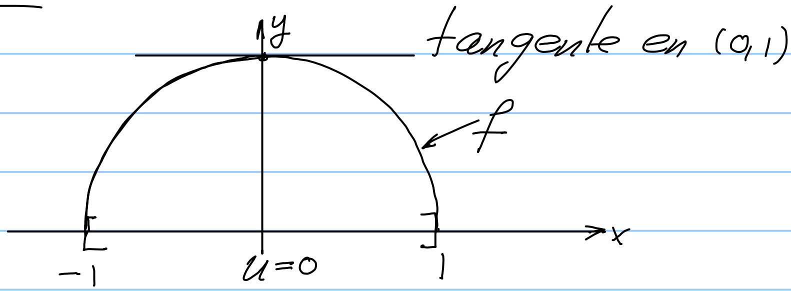
8.4. Théorème de Rolle

Théorème: soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $[a,b] \subset D$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a)=f(b)=0$, alors il existe $u \in]a,b[$ tel que $f'(u)=0$

Explication/exemple

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$D(f) = [-1,1]$



f continue sur $[-1,1]$
f dérivable sur $]-1,1[$.

Démonstration:

i) f continue sur $[a,b]$. Alors il existe un maximum M et un minimum m, et $f([a,b]) = [m,M]$.

ii) si $m=M=0 \iff \forall x \in [a,b]$, $f(x)=0$
$\Rightarrow \forall u \in]a,b[$, $f'(u)=0$.

iii) ou bien M ou m sont différents de zero.

cas $\overset{m \neq 0}{M \neq 0} \Rightarrow \exists\, c \in]a\ b[$ tel que $f(c) = \overset{m}{M}$

c.-à-d.:

$$f(x) \underset{\leqslant}{\overset{\geqslant}{}} \overset{M = m}{f(c)} \quad , \forall x \in [a, b].$$

Donc, pour $x \neq c$,

$$\underbrace{0 \underset{\leqslant}{\overset{\geqslant}{}}}_{x<c}\ \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \underbrace{\underset{\leqslant}{\overset{\geqslant}{}}\ 0}_{x>c.}$$

① $\Rightarrow 0 \underset{\leqslant}{\overset{\geqslant}{}} \lim_{x \to c-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$ (car f dérivable en c)

② $\Rightarrow 0 \underset{\geqslant}{\overset{\leqslant}{}} \lim_{x \to c+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$ (car f dérivable en c)

Donc $0 \underset{\leqslant}{\overset{\geqslant}{}} f'(c) \underset{\leqslant}{\overset{\geqslant}{}} 0 \Longrightarrow f'(c) = 0.$

On a donc démontré le théorème en choisissant $u = c$ $\lrcorner$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 8

La fonction dérivée

8.5. Théorème des accroissements finis

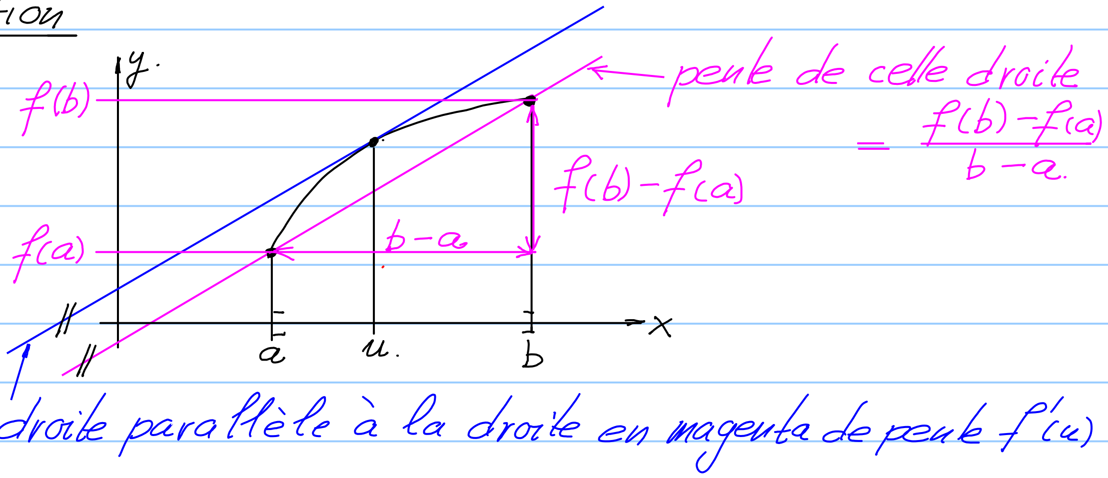
vidéo A

8.5.1. Théorème et explications

Théorème. soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $[a,b] \subset D$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $u \in]a,b[$ tel que

$$\boxed{f'(u) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}} \qquad (*)$$

Explication



vidéo B

8.5.2. Démonstration

Démonstration: soit

$$g(x) = f(x) - \underbrace{\left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)}$$

équation de la droite en magenta

$$g(a) = f(a) - f(a) = 0$$
$$g(b) = f(b) - f(b) = 0$$

g continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$

Par le théorème de Rolle il existe $u \in]a,b[$ tel que

$$0 = g'(u) = f'(u) - \left(0 + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) \Rightarrow (*)$$

$\lrcorner$

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 8

La fonction dérivée

8.6 Implications du théorème des accroissements finis

vidéo A

8.6.1. Remarques et reformulation

Remarque : $(*)$ peut être réécrit (isoler $f(b)$)

$$\boxed{f(b) = f(a) + f'(u)\,(b-a)} \quad (**).$$

Remarque si f est continue sur $[a,b]$, $a<b$ et dérivable sur $]a,b[$, alors pour tout $[c,d] \subset [a,b]$, $c<d$, f est continue sur $[c,d]$ et dérivable sur $]c,d[$
$\Rightarrow$ le théorème s'applique à $[c,d]$

Reformulation Soit $[x, x+h] \subset D(f)$, $h>0$, f continue sur $[x, x+h]$ et dérivable sur $]x, x+h[$.
Alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\boxed{f(x+h) = f(x) + f'(x+\theta h)\,h. \qquad (**)_{bis}}$$

Démonstration : poser $a = x$, $b = x+h$, $u = x+\theta h \in]x; x+h[$

vidéo 3

8.6.2. Conséquences immédiates

Conséquences immédiates de $(**)_{bis}$

Corollaire 1 : Soit $[a,b] \subset D(f)$, $a<b$, f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Si $f'=0$ sur $]a,b[$ (c.-à-d. $\forall x \in]a,b[, f'(x)=0$) alors f est constante sur $[a,b]$ (c.-à-d. $\forall x \in [a,b], f(x)=f(a)$).

Corollaire 2 : Soit $[a,b] \subset D(f)$, $a<b$, f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors

i) $f' \geq 0$ sur $]a,b[\iff f$ croissante sur $[a,b]$
ii) $f' > 0$ sur $]a,b[\implies f$ strictement croissante sur $[a,b]$
iii) $f' \leq 0$ sur $]a,b[\iff f$ décroissante sur $[a,b]$
iv) $f' < 0$ sur $]a,b[\implies f$ strictement décroissante sur $[a,b]$

Corollaire 3 : Soit $[a,b] \subset D(f)$, $a<b$, f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) \geq 0$ et $f' \geq 0$ sur $]a,b[$, alors $f \geq 0$ sur $[a,b]$

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 9

Etude des fonctions

9.1. Théorème des accroissements finis généralisé

Théorème Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $g : D(g) \to \mathbb{R}$, $[a,b] \subset D(f) \cap D(g)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f, g continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$, et $\forall x \in]a,b[$, $g'(x) \neq 0$. Alors il existe $u \in]a,b[$, tel que

$$\boxed{\frac{f'(u)}{g'(u)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$$

Remarque : pour $g(x) = x$ c'est le théorème des accroissements finis

Remarque : $\forall x \in]a,b[$, $g'(x) \neq 0 \Rightarrow g(b) \neq g(a)$ (car si $g(b) = g(a)$, alors il existe u tel que $g'(u) = 0$)

Démonstration : on pose

$$h(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} (g(x) - g(a)) \right)$$

On a $h(a) = h(b) = 0$ et on applique le théorème de Rolle

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 9

Etudes des fonctions

9.2. Règle de Bernoulli de l'Hospital

vidéo A

9.2.1. Enoncé du théorème

<u>Théorème</u> Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $g : D(g) \to \mathbb{R}$, deux fonctions dérivables sur $]a, b[\subset D(f) \cap D(g)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, telles que $\forall x \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$ et

$$\boxed{\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0 \qquad (1)}$$

Si

$$\boxed{\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \qquad (2)}$$

A $\Downarrow$ B

Alors

$$\boxed{\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell .}$$

<u>Remarque</u>: (généralisation de BH). On a le théorème analogue pour $\lim\limits_{x \to b-} \ldots$ et pour les cas

$\pm\infty$ au lieu de 0 dans (1).

vidéo B

9.2.2. Exemples et contre-exemple

1) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \underset{\text{une fonction paire}}{\Big|} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sin(x)}{x} \underset{BH\ \frac{0}{0}}{=\Big|} \lim_{x \to 0+} \frac{\cos(x)}{1} =$$

$$\underset{\cos(x)\text{ une fonction continue}}{=\Big|} \cos(0) = 1 .$$

2) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \Bigg|_{\text{une fonction paire}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \underset{\substack{BH\\ \frac{0}{0}}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{2x}$

$\displaystyle = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{2}.$

Bémol  : la réciproque de BH $(B \Rightarrow A)$ est fausse !

On a $\displaystyle \lim_{x\to 0+} \left(x\cdot \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) \underset{\substack{\text{théorème des}\\ \text{deux gendarmes}}}{=} 0$,

mais $\displaystyle 0 = \lim_{x\to 0+} \left(x\cdot \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \underset{\boxed{BH,\ \frac{0}{0}}}{=}$ pourvu que le "Si" soit satisfait

$\displaystyle = \lim_{x\to 0+} \frac{2x\cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1}$ n'existe pas.

le théorème BH ne s'applique pas

Vidéo C

9.2.3. Comparaison de fonctions

1) $\displaystyle \lim_{x\to 0+} \left(x\cdot \ln(x)\right) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \underset{\substack{BH,\\ \frac{-\infty}{+\infty}}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0$

2) $\displaystyle \lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} \left(e^{\ln(x)}\right)^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\cdot \ln(x)} =$

$\displaystyle \underset{\substack{\exp(x)\text{ une}\\ \text{fonction continue}}}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0+} (x\cdot \ln(x))} = e^0 = 1$

3) $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathbb{N}}} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ x\in\mathbb{R}}} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} \left(e^{\ln(1+\frac{2}{x})}\right)^x =$

la suite $x_n = n$ — toutes les suites (x_n) telles que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot \ln(1+\frac{2}{x})\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(1+\frac{2}{x})}{\frac{1}{x}}\right)} = \Big|_{BH,\,\frac{0}{0}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\right)} = e^{2\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{x}}} = e^2$$

4) $\boxed{\forall p\in\mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x^p}e^{-\frac{1}{x}}\right) = 0}$

i) $\underline{p\leq 0}$: $\frac{1}{x^p} = x^{-p} = x^{|p|}$

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x^p}e^{-\frac{1}{x}}\right) = \Big(\underbrace{\lim_{x\to 0+} x^{|p|}}_{\substack{=1,\ p=0\\ =0,\ p<0}}\Big)\Big(\underbrace{\lim_{x\to 0+} e^{-\frac{1}{x}}}_{=0}\Big) = 0$$

ii) $\underline{0<p\leq 1}$:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^p}e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x^p}}{e^{\frac{1}{x}}} = \Big|_{BH\ \frac{\infty}{\infty}} \lim_{x\to 0+}\frac{(-p)\frac{1}{x^{p+1}}}{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0+}\left(p\cdot\frac{1}{x^{p-1}}e^{-\frac{1}{x}}\right) \underset{\text{car } p-1\leq 0}{\overset{i)}{=}} 0$$

iii) $\underline{p>1}$, BH par récurrence $n := \lceil p\rceil$ fois : ($:=$ le plus petit entier $\geq p$)

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x^p}}{e^{\frac{1}{x}}} = \ldots\ BH\ \frac{\infty}{\infty},\ n \text{ fois},\ \ldots =$$

$$= \lim_{x\to 0+}\left(p\cdot(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-n)\frac{1}{x^{p-n}}e^{-\frac{1}{x}}\right) \underset{i)}{=} 0$$

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers la vidéo C	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 9

Etudes des fonctions

9.3. Démonstration du théorème de BH

i) f, g dérivables sur $]a,b[$, donc f, g continues sur $]a,b[$. Donc pour tout $x \in]a,b[$, f, g continues sur $]a,x]$ et dérivables sur $]a,x[$.

ii) f, g continues sur $[a,x]$ par prolongement par continuité si on définit $f(a) = g(a) = 0$, car par hypothèse $\lim\limits_{t \to a+} f(t) = \lim\limits_{t \to a+} g(t) = 0$.

iii) on a le théorème des accroissements finis généralisé sur $[a,x]$ ($g'(t) \neq 0$ pour tout $t \in]a,x[$ par hypothèse).

iv) $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \underset{\substack{\text{théorème des}\\ \text{accroissements finis généralisé}}}{=} \frac{f'(u)}{g'(u)}$$

pour un $u \in]a,x[$.

v) puisque $u \in]a,x[$ on obtient par iv) pour toute suite (x_n), $x_n > a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ une suite (u_n), $u_n > a$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ ce qui implique que

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u \to a+} \frac{f'(u)}{g'(u)}$$ pourvu que $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(u)}{g'(u)}$ existe

ici on considère toutes les suites (u_n) telles que $u_n > a$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$. Mais $u \in]a,x[$ dépend de x et on ne devrait considérer que les suites (u_n) générées par les suites (x_n) de la limite originale.

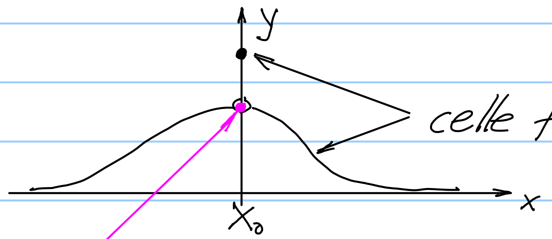
Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 9

Etudes des fonctions

9.4. Démonstration du théorème 8.2

Théorème 8.2 Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[\subset D$, $a<b$, f continue sur $]a,b[$, dérivable sur $]a,b[\setminus \{x_0\}$. S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\boxed{\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell \quad (A)}$ alors f est dérivable en x_0 et $\boxed{f'(x_0) = \ell \quad (B)}$



cette fonction n'est pas possible comme dérivée d'une fonction f

si c'est le graphe d'une fonction dérivée, la valeur en x_0 est là

Démonstration

$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0+} \ldots = \lim_{h \to 0-} \ldots$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \underset{\text{BH}, \frac{0}{0}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{h\to 0+} \frac{f'(x_0+h)}{1} \\ \lim_{h \to 0-} \frac{f'(x_0+h)}{1} \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{h\to 0} f'(x_0+h) = \ell$$

par hypothèse

D'une manière analogue on démontre la version suivante du même théorème. (le montrer !)

__Théorème 8.2^{bis}__ Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $[a,b] \subset D$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. S'il existe $\ell_+ \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to a+} f'(x) = \ell_+$, alors

f est dérivable à droite en a et $f'(a) = \ell_+$, et s'il existe $\ell_- \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to b-} f'(x) = \ell_-$, alors f est dérivable

à gauche en b et $f'(b) = \ell_-$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 9

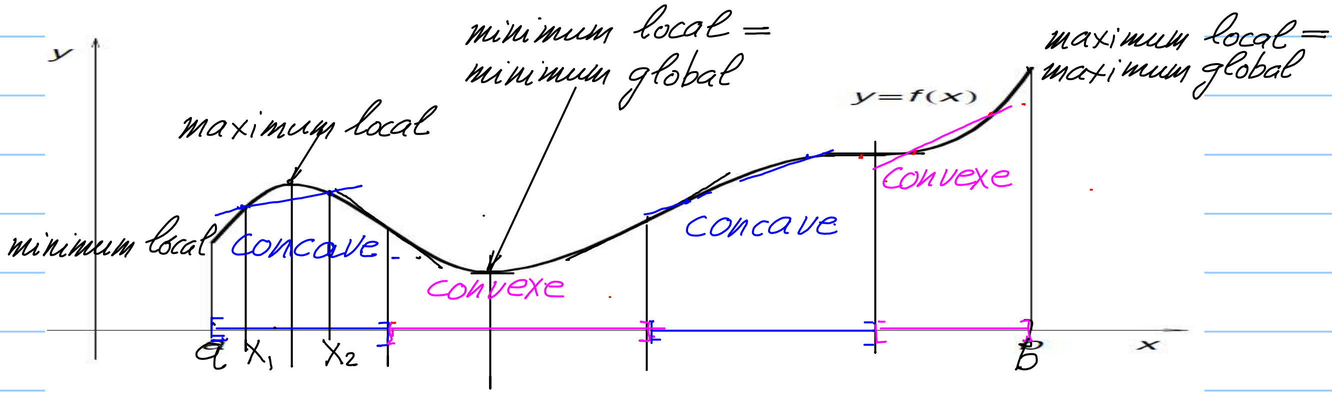
Etude des fonctions

9.5. Discussion du graphe d'une fonction

vidéo A

9.5.1. Terminologie

Dans ce paragraphe et le prochain $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $I_0 \subset I$ est un sous-intervalle fermé.



vidéo B

9.5.2 Définitions

convexe: f est convexe sur I_0 si $\forall x_1, x_2 \in I_0$, $x_1 < x_2$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$.

concave: f est concave sur I_0 si $\forall x_1, x_2 \in I_0$, $x_1 < x_2$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

point stationnaire: f admet un point stationnaire en $x_0 \in [a, b]$ si f est différentiable en x_0 et $f'(x_0) = 0$

maximum local: f admet un maximum local en $x_0 \in [a,b]$ si $f(x) \leqslant f(x_0)$ <u>pour x proche de x_0</u>

(—— $\Leftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in [a,b]$, tels que $|x - x_0| < \varepsilon$)

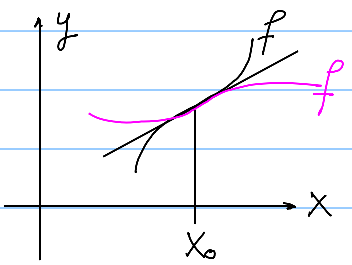
minimum local: f admet un minimum local en $x_0 \in [a,b]$ si $f(x) \geqslant f(x_0)$ <u>pour x proche de x_0</u>

maximum [global]: f admet un maximum [global] en $x_0 \in [a,b]$ si $f(x) \leqslant f(x_0)$ pour tout $x \in [a,b]$.

minimum [global]: f admet un minimum [global] en $x_0 \in [a,b]$ si $f(x) \geqslant f(x_0)$ pour tout $x \in [a,b]$.

extremum (local): f admet un maximum (local) ou un minimum (local).

point d'inflexion: f admet un point d'inflexion en $x_0 \in \,]a,b[$ <u>si f est differentiable en x_0</u> et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que le reste $r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ satisfait $\forall x \in \,]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\, \setminus \{x_0\}$ $r(x) \cdot (x - x_0) > 0$ (ou < 0).



Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 9

Etude des fonctions

9.6. Critères

vidéo 1

9.6.1. Convexité

Dans ce paragraphe $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$, et $I_0 \subset I$ est un sous-intervalle fermé.

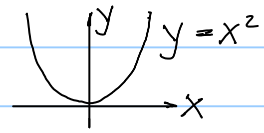
<u>Remarque:</u> les théorèmes qui suivent découlent tous du théorème des accroissements finis et de ses corollaires (sous hypothèse de l'existence des fonctions dérivées en question).

<u>Théorème</u> (critère suffisant pour la convexité)
Si f' est une fonction <u>croissante</u> sur I_0 (en particulier si $f'' \geq 0$ sur I_0), alors f est convexe sur I_0.

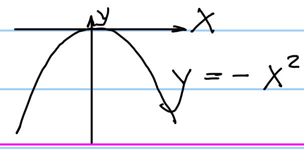
<u>Théorème</u> (critère suffisant pour la concavité)
Si f' est une fonction <u>décroissante</u> sur I_0 (en particulier si $f'' \leq 0$ sur I_0), alors f est concave sur I_0.

<u>Remarque:</u> toujours avoir en tête les exemples

$f(x) = x^2$ (convexe sur $\mathbb{R}$)



$f(x) = -x^2$ (concave sur $\mathbb{R}$)



vidéo B

9.6.2. Extrema

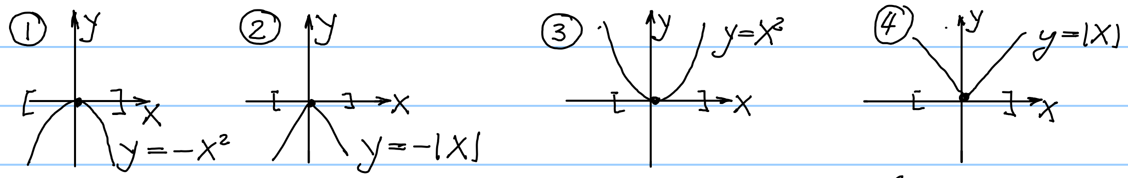
Théorème (extremum local, condition nécessaire)

Si f admet un extremum local en $x_0 \in]a, b[$ et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$

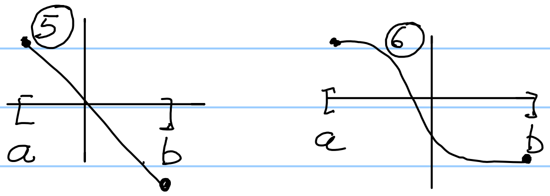
Théorème (extremum local, condition suffisante)

i) si $f'(x_0) = 0$ en $x_0 \in [a, b]$ et si $f''(x_0) < 0$ alors f admet un maximum local en x_0

ii) si $f'(x_0) = 0$ en $x_0 \in [a, b]$ et si $f''(x_0) > 0$ alors f admet un minimum local en x_0.



maximum local minimum local



① cas i) du théorème

③ cas ii) du théorème

②, ④ le théorème ne s'applique pas

⑤ maximum (local) en a, minimum (local) en b, le théorème ne s'applique pas

⑥ cas i) du théorème en a, cas ii) en b.

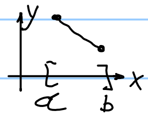
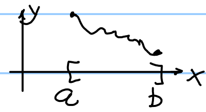
Théorème (extremum [global])

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f continue sur $[a, b]$

Les points $x_0 \in [a, b]$ d'extremums [globaux] sont éléments de :

i) {les points dans $]a,b[$ où f n'est pas dérivable}

ii) {les points où $f'=0$} (points stationnaires)

iii) $\{a, b\}$  ,  (les bords)

vidéo C

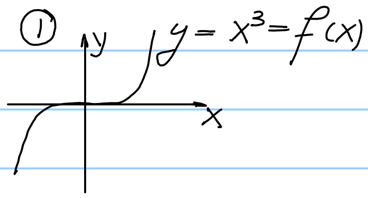
9.6.3. Points d'inflexion

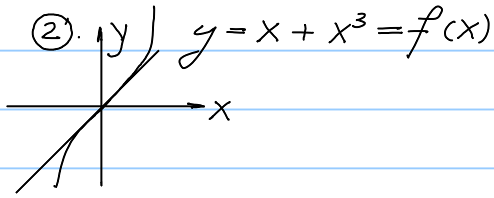
Théorème (points d'inflexion)

Soit f une fonction trois fois dérivable sur $]a,b[\subset D(f)$.

i) si f admet un point d'inflexion en $x_0 \in]a,b[$ alors $f''(x_0)=0$

ii) si $f''(x_0)=0$ et $f'''(x_0)\neq 0$ en $x_0 \in]a,b[$, alors f admet un point d'inflexion en x_0

① 

② 

① $f''(0)=0$, $f'''(0)=6\neq 0 \Longrightarrow$ point d'inflexion par ii)

⌈ ou directement en utilisant la définition

$f(x) = 0 + 0\cdot(x-0) + r(x) \Rightarrow r(x) = x^3$

et $r(x)\cdot(x-0) = x^4 > 0$ pour $x\neq 0$ ⌋

② $f''(0)=0$, $f'''(0)=6\neq 0 \Longrightarrow$ point d'inflexion par ii)

⌈ ou directement en utilisant la définition

$f(x) = 0 + 1\cdot(x-0) + r(x) \Rightarrow r(x) = x^3$

et $r(x)\cdot(x-0) = x^4 > 0$ pour $x\neq 0$ ⌋

vidéo

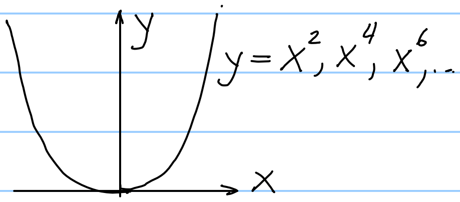
9.6.4. Le cas général

Remarque (cas général)

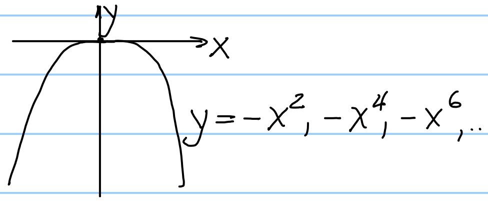
- si $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) < 0$, n pair
  alors f admet en x_0 un maximum local.

- si $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) > 0$, n pair
  alors f admet en x_0 un minimum local.

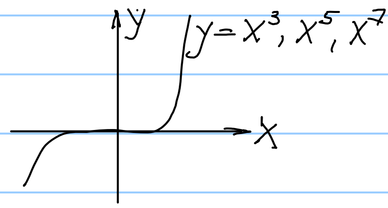
- si $f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, n impair
  alors f admet en x_0 un point d'inflexion.



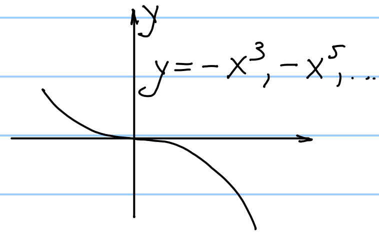
minimums



maximums



points d'inflexion



Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers la vidéo C	
Lien vers la vidéo D	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 9

Etude des fonctions

9.7. Exemple d'étude d'une fonction

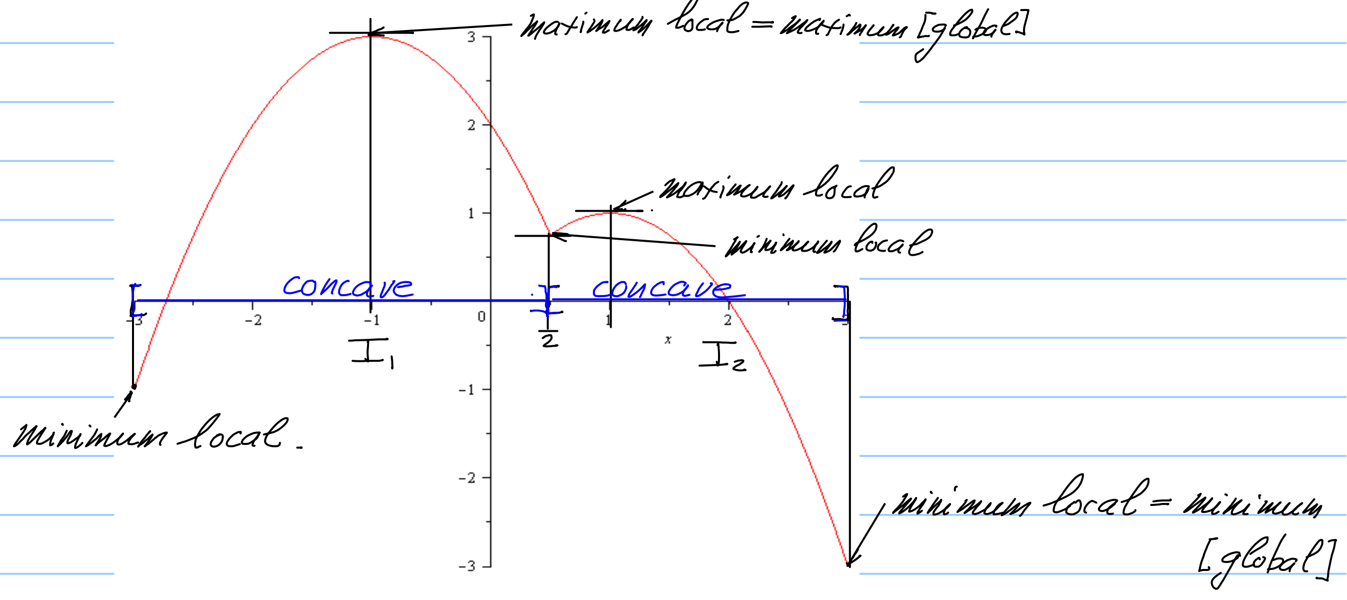
vidéo A

9.7.1. Le procédé

1) trouver $D(f)$, $Im(f)$ ← si possible, sinon à la fin de la discussion
2) symétries (paire, impaire, périodique)
3) zéros de f
4) continuité de f (limite à droite, limite à gauche pour les points de discontinuité et pour les points au bord)
5) dérivabilité de f (calculer f', f'' avec leur domaine de définition $\subset D(f)$)
6) points particuliers (points stationnaires, extremums. (locaux et glaubaux) points où f n'est pas dérivable)
7) monotonie de f (signe de f', convexité, concavité)
8) asymptotes éventuelles
9) tracer le graphe de f

vidéo B

9.7.2 L'exemple



$$f(x) = |2x-1| - x^2 + 1 \quad , \quad D(f) = [-3, 3]$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) = \begin{cases} 2 - 2x - x^2 & \text{si} \quad x \in [-3, \tfrac{1}{2}[=: I_1 \\ 2x - x^2 & \text{si} \quad x \in [\tfrac{1}{2}, 3] =: I_2 . \end{cases}$$

vidéo C

9.7.3. Points 1-5 du procédé

1) $D(f) = [-3, 3]$, $Im(f) = [m, M]$ (si f continue)

2) f n'a pas de symétries

pas dans I_1

3) $x^2 + 2x - 2 = 0$ sur I_1 $\quad x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = -1 - \sqrt{3} = -2.7\ldots$

$2x - x^2 = 0$ sur I_2 $\quad x = 2$ $\quad (x = 0 \notin I_2)$

4) f continue sur $[-3, 3]$ (composition, addition, ... de fonctions continues)

5) f dérivable sur I_1 et I_2 (même sur $I_1 \cup \{\frac{1}{2}\} = [-3, \frac{1}{2}]$) mais pas sur $I_1 \cup I_2$

Sur I_1 : $f'(x) = -2 - 2x$, $f''(x) = -2$
Sur I_2 : $f'(x) = 2 - 2x$, $f''(x) = -2$

vidéo D

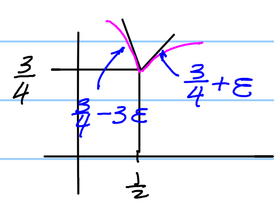
9.7.4. Point 6 du procédé

6) <u>points particuliers</u>

i) <u>f n'est pas dérivable en</u> $x = \frac{1}{2}$ car :

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to \frac{1}{2}-} f'(x) &= \lim_{x \to \frac{1}{2}-} (-2 - 2x) = -3 \\ \lim_{x \to \frac{1}{2}+} f'(x) &= \lim_{x \to \frac{1}{2}+} (2 - 2x) = 1 \end{aligned}\right\} -3 \neq 1.$$

de plus on a (pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon|$ petit)



$$f\left(\tfrac{1}{2}+\varepsilon\right) = |2\varepsilon| + \tfrac{3}{4} - \varepsilon - \varepsilon^2 \geq \tfrac{3}{4} + |\varepsilon| - \varepsilon^2 \geq \tfrac{3}{4}$$

un candidat pour m

et il s'agit donc d'un minimum local

ii) points où $f'=0$: Sur I_1 : $-2-2x=0 \Rightarrow x=-1$

Sur I_2 : $2-2x=0 \Rightarrow x=1$

en $x=-1$: $f''(-1)=-2$, donc f admet un maximum local

en $x=1$: $f''(1)=-2$, donc f admet un maximum local

on a $f(-1)=3$, $f(1)=1$

des candidats pour M

iii) valeurs au bord $f(-3)=-1$, $f(3)=-3$

maximum et minimum [global]

$$M = \text{maximum}\left\{-1, -3, \tfrac{3}{4}, 1, 3\right\} = 3$$
$$m = \text{minimum}\left\{-1, -3, \tfrac{3}{4}, 1, 3\right\} = -3.$$

Donc $\mathrm{Im}(f) = [-3,3]$

vidéo I

9.7.5. Points 7-9 du procédé

7) monotonie, convexité/concavité (tableau des signes)

$f'(-1)=0$, $f'(1)=0$, f n'admet pas de dérivée en $x=\frac{1}{2}$

Discussion: $[-3,3] = [-3,-1] \cup [-1,\tfrac{1}{2}] \cup [\tfrac{1}{2},1] \cup [1,3]$

1) sur $[-3,-1]$: $f'(-3)=4$, $f''(x)=-2<0$. Donc f' est décroissante sur $[-3,-1]$: $4 \geq f'(x) \geq 0$, donc f est une fonction croissante et f est concave

sur $[-1,\frac{1}{2}]$ c'est la dérivée à gauche en $\frac{1}{2}$

ii) sur $[-1,\frac{1}{2}]$: $f'(-1)=0$, $f''(x)=-2<0$. Donc f' est décroissante sur $[-1,\frac{1}{2}]$: $0 \geq f'(x) \geq -3$, donc f est une fonction décroissante et f est concave.

sur $[\frac{1}{2},1]$ c'est la dérivée à droite en $\frac{1}{2}$

iii) sur $[\frac{1}{2},1]$: $f'(\frac{1}{2})=1$, $f''(x)=-2<0$. Donc f' est décroissante sur $[\frac{1}{2},1]$: $1 \geq f'(x) \geq 0$, donc f est une fonction croissante et f est concave.

iv) sur $[1,3]$: $f'(1)=0$, $f''(x)=-2<0$. Donc f' est décroissante sur $[1,3]$, $0 \geq f'(x) \geq -4$, donc f est une fonction décroissante et f est concave

<u>Attention</u>: f est concave sur I_1 et I_2 mais f n'est pas concave sur $I_1 \cup I_2$

8) pas d'asymptotes à discuter.

9) voir le graphe

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers la vidéo C	
Lien vers la vidéo D	
Lien vers la vidéo E	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 9

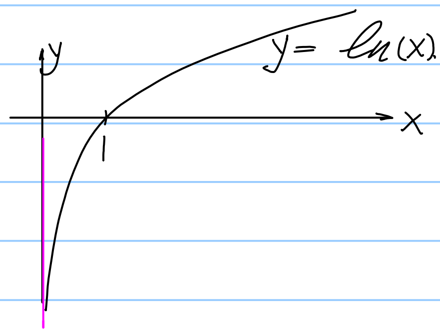
Etude des fonctions

9.8. Asymptotes (exemples)

i) <u>asymptotes verticales</u> "$\lim\limits_{\substack{x \to a\pm \\ a \in \mathbb{R}}} f(x) = \pm\infty$"

<u>Exemple:</u> $\ln :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

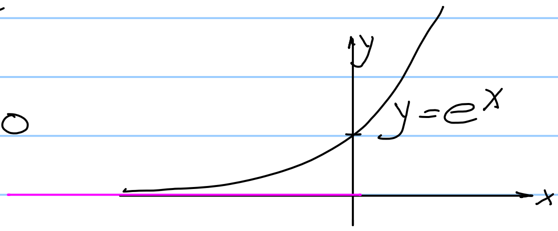
$\lim\limits_{x \to 0+} \ln(x) = -\infty$



ii) <u>asymptotes horizontales</u> "$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b_\pm \, , \; b_\pm \in \mathbb{R}$"

<u>Exemple:</u> $f(x) = e^x$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$



iii) <u>asymptotes obliques</u> "$f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} a_\pm x + b_\pm$", $a_\pm, b_\pm \in \mathbb{R}$

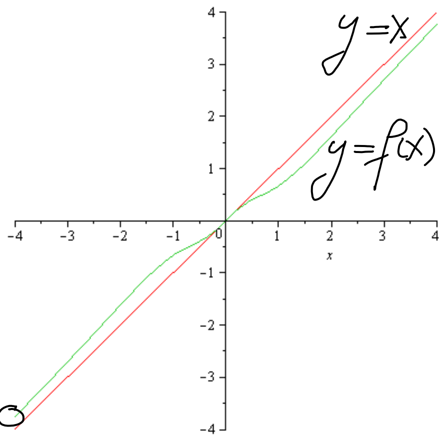
$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a_\pm \in \mathbb{R} \\ &\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - a_\pm x) = b_\pm \in \mathbb{R}. \end{aligned}}$$

Exemple

$$f(x) = \frac{x + x^5}{1 + x^2 + x^4} \qquad \text{impair}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x^3}{1 + x^2 + x^4} = 0$$



Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 10

Développements limités

10.1. Définitions

vidéo A

10.1.1. Développements limités

Définition: soit $f: D \to \mathbb{R}$, $a \in I \subset D$, où I est un intervalle ouvert. Si pour un $n \in \mathbb{N}$ il existe des nombres $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$, continue en $x = a$, tels que $\forall x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, on dit que f admet un développement limité d'ordre n autour de a

Remarque: si f admet un développement limité d'ordre n il est unique, car par récurrence on trouve que pour $0 \leq m \leq n$

$$a_m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k (x-a)^k}{(x-a)^m}.$$

Remarque: l'existence d'un développement limité avec $n=0$ est équivalente à la continuité de f en a et avec $n=1$ à la différentiabilité de f en a.

Vidéo B

10.1.2. Fonctions de classe C^k

Terminologie: fonctions de classe C^k $(\equiv C^k(I) \equiv C^k(I,\mathbb{R}))$

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Alors on définit

$$C^0(I) := \{f : D \to \mathbb{R} : I \subset D,\ f \text{ continue sur } I\}.$$

et pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$C^k(I) := \{f : D \to \mathbb{R} : I \subset D,\ f\ k \text{ fois différentiable sur } I \text{ et } f^{(k)} \text{ une fonction continue sur } I\}$$

De plus on dit que $f \in C^\infty(I)$, si $f \in C^k(I)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque: $C^0 \supset C^1 \supset C^2 \supset \dots \supset C^\infty \supset C^\omega$

"omega" (voir plus loin)

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 10

Développements limités

10.2 Formule de Taylor

vidéo A

10.2.1. Fonctions $n+1$ fois dérivables

Théorème 1

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur I et soit $a \in I$. Alors f admet un développement limité d'ordre n autour de a. Plus précisément, pour tout $x \in I$, $x > a$ ($x < a$) il existe $u \in]a, x[$ ($u \in]x, a[$) tel que :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k}_{= p_n(x) \text{ le polynôme de Taylor d'ordre } n} + \underbrace{(x-a)^n \cdot \varepsilon(x)}_{= r_n(x), \text{ le } n\text{-ème reste}}$$

avec

$$\boxed{a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)}$$

u dépend de x

$$\boxed{\varepsilon(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(u) \, (x-a)}$$

Remarque: pour $n=0$ on obtient $f(x) = f(a) + f'(u)(x-a)$ ce qui est le théorème des accroissements finis.

vidéo B

10.2.2. Démonstration

Démonstration: soit $x > a$ (la démarche est analogue pour $x < a$) et soit $g : [a, x] \to \mathbb{R}$ (avec $[a, x] \subset I$) définie par

$$g(y) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(y) (x-y)^k - c(x-y)^{n+1}.$$

g est continue sur $[a, x]$ et dérivable sur $]a, x[$. De plus $g(x)=0$, et on choisit c tel que $g(a)=0$ (isoler c dans l'équation $g(a)=0$). Par le théorème de Rolle il existe donc $u \in]a,x[$ tel que

$$0 = g'(u) = \dots = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(u)(x-u)^n + c(n+1)(x-u)^n$$

ce qui implique que $c = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(u)$. Ceci montre le théorème, vu que l'équation $g(a)=0$ implique que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + c\,(x-a)^{n+1}$$

Vidéo C

10.2.3. Fonctions de classe C^n

Théorème 2

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $f \in C^n(I)$ pour un $n \in \mathbb{N}$ et soit $a \in I$. Alors f admet un développement limité d'ordre n autour de a. Plus précisément, pour tout $x \in I$, $x > a$ ($x < a$) il existe $u \in]a,x[$ ($u \in]x,a[$) tel que :

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k}_{= p_n(x)} + \underbrace{(x-a)^n \cdot \varepsilon(x)}_{= r_n(x)}$$

$= p_n(x)$ le polynôme de Taylor d'ordre n.

$r_n(x)$, le n-ème reste

avec

$$\boxed{a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)}$$

$$\boxed{\varepsilon(x) = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(u) - f^{(n)}(a)\right) \xrightarrow[x \to a]{} 0}$$

$u = u(x) \xrightarrow[x \to a]{} a$

car $f^{(n)}$ continue en a.

vidéo

10.2.4. Remarques et démonstration

Remarque: pour $n=0$ on a $f(x)=f(a)+\varepsilon(x)$ ce qui exprime la continuité de f en $x=a$, et pour $n=1$ on a
$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+(x-a)\,\varepsilon(x)$$
ce qui exprime la différentiabilité de f en $x=a$

Remarque: si $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ est $(n+1)$ fois dérivable alors f est de classe $C^n(I)$ et les deux théorèmes donnent deux représentations possibles du reste (il en existent d'autres)

Démonstration: une fonction de classe $C^n(I)$ est $n=(n-1)+1$ fois dérivable et par le théorème 1 on a donc,
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x-a)^k + \frac{1}{n!} f^{(n)}(u)\,(x-a)^n.$$

et par conséquence (ajouter zéro) :
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \underset{\underset{\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)}{\parallel}}{a_k} (x-a)^k + \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(u)-f^{(n)}(a)\right)(x-a)^n.$$

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers la vidéo C	
Lien vers la vidéo D	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

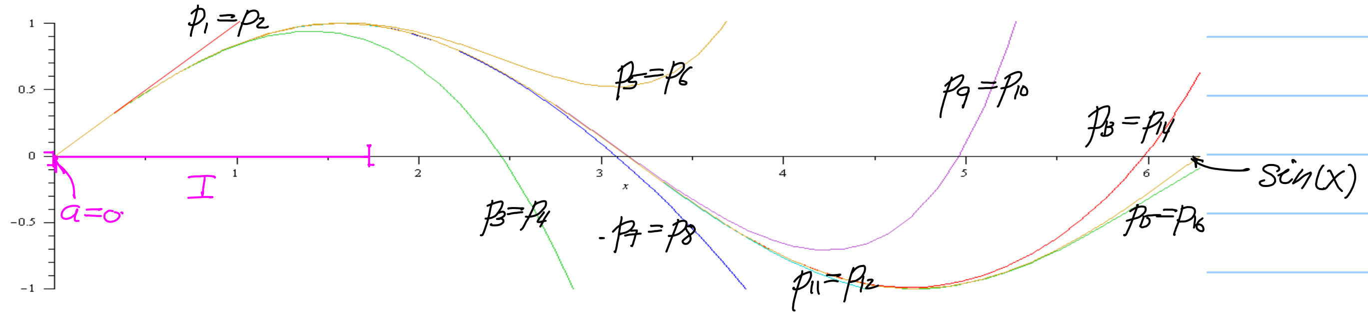
Chapitre 10

Développements limités

10.3. Interprétation de la formule de Taylor

vidéo A

10.3.1. Un exemple



Pour $f(x) = \sin(x)$ et $a=0$ on trouve par exemple (tous les polynômes sont impaires puisque sin est impaire).

$$a_0 = \frac{1}{0!} f(0) = 0 \qquad p_0(x) = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{1!} f'(0) = 1 \qquad p_1(x) = 0 + x = x$$

$$a_2 = \frac{1}{2!} f''(0) = 0 \qquad p_2(x) = 0 + x + 0 = x$$

$$a_3 = \frac{1}{3!} f'''(0) = -\frac{1}{6} \qquad p_3(x) = 0 + x + 0 - \frac{1}{6}x^3 = x - \frac{1}{6}x^3$$

vidéo B

10.3.2. A connaître (faire les calculs analogues)

l'écriture implique $a=0$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \underbrace{x^2 + x^2\varepsilon(x)}_{= x\cdot\underbrace{(x + x\varepsilon(x))}_{=\varepsilon_1(x)} = x\cdot\varepsilon_1(x)} = 1 + x + x\cdot\varepsilon_1(x)$$

on ne numérotera pas les fonctions ε

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3 \cdot \varepsilon(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + x^5\varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

$$\ln(x) = \ln(1 + (x-1))$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + (x-1)^3 \underbrace{\varepsilon(x)}_{\lim_{x\to 1}\varepsilon(x)=0}$$

$a=1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + x^n\varepsilon(x) \quad , \alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$$

$$= \frac{1}{k!}\left[(1+x)^\alpha\right]^{(k)}\Big|_{x=0}$$

dérivée k-ème

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 10

Développements limités

10.4. Application au calcul de limites

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + x\cdot\varepsilon(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (1+\varepsilon(x)) = 1.$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(1-\frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x))}{x^2} = \frac{1}{2}.$

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x^4\cos(e^{\frac{1}{x^2}}))-1}{x} = (*)$

Soit $X = x^4\cos(e^{\frac{1}{x^2}})$

On a $\lim\limits_{x\to 0} X = 0$ (deux gendarmes)

et $e^x = 1 + x + x\,\varepsilon(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

Donc $e^X = 1 + X + X\cdot\varepsilon(X)$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} X = 0$ et $\varepsilon(x)$ est continue en $x=0$, on a

$\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(X) = 0$ donc $\varepsilon(X) = \varepsilon(x)$

Par conséquence

$(*) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + X + X\,\varepsilon(x) - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{X}{x}(1+\varepsilon(x))\right)$

$= \lim\limits_{x\to 0} \left(x^3\cdot\cos(e^{\frac{1}{x^2}})\right)\cdot 1 = 0$ (deux gendarmes)

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 10

Développements limités

10.5. Composition de développements limités

vidéo A

10.5.1. Exemple

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\underset{\cos(0)}{1} + \underbrace{(\cos(x)-1)}_{=:X}} \quad \text{(autour de } a=0\text{)}$$

avec $\lim_{x\to 0} X = 0.$

On a $X = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)$ et

$$\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + X^2 \cdot \varepsilon(X)$$

et donc (à l'ordre 4 à titre d'exemple)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &= 1 - \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)\right) \\ &\quad + \left(-\frac{1}{2}x^2 + \underbrace{\frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)}_{= x^2\cdot\varepsilon(x)}\right)^2 \\ &\quad + \underbrace{\left(-\frac{1}{2}x^2 + \underbrace{\frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)}_{= x^2\cdot\varepsilon(x).}\right)^2 \varepsilon(x)}_{= x^4\varepsilon(x)} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\right)x^4 + x^4\varepsilon(x) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x).\end{aligned}$$

vidéo B

10.5.2. Applications

1) $\tan(x)$ autour de $a=0$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x)\cdot\frac{1}{\cos(x)}$$

$$= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)\right)$$

$$= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + x^3\varepsilon(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + x^3\cdot\varepsilon(x)$$

<u>A comparer avec le calcul direct:</u> (à éviter si possible)

$$f(x) = \tan(x) \quad , f(0) = 0 \quad \Rightarrow a_0 = f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} \quad , f'(0) = 1 \quad \Rightarrow a_1 = f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-2}{\cos(x)^3}(-\sin(x)) \; , \; f''(0) = 0 \quad \Rightarrow a_2 = 0$$

$$f'''(x) = \frac{6}{\cos(x)^4}(-\sin(x))^2 + \frac{-2}{\cos(x)^3}(-\cos(x)) , \; f'''(0) = 2$$

$$\Rightarrow a_3 = \frac{1}{3!}f'''(0) = \frac{1}{3}$$

Donc $\quad \tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$

2) $f(x) = \sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x)) = -\frac{1}{30}x^7 + x^7\varepsilon(x)$

amusez-vous !

$$\sin(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

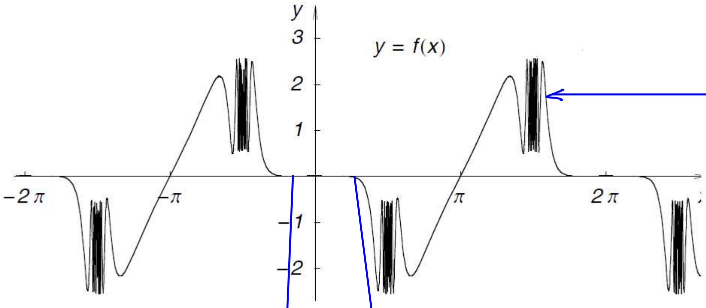
$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)\right) - \frac{1}{6}\left(x + x\cdot\varepsilon(x)\right)^3$$

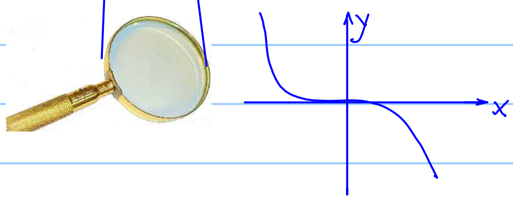
$$- \left(\left(x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)\right) + \frac{1}{3}\left(x + x\cdot\varepsilon(x)\right)^3\right) + x^3\varepsilon(x)$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^3 - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

$$= 0 + x^3\cdot\varepsilon(x) \longleftarrow$$ il faut pousser les développements plus loin



graphe de la fonction
$f(x) = \sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))$;
voir 5.5., exemple 4)



$$f(x) = -\frac{1}{30}x^7 + x^7\,\varepsilon(x)$$

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 10

Développements limités

10.6 Séries entières

vidéo A

10.6.1 Définition

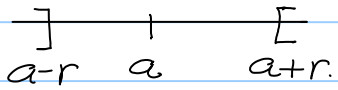
<u>Définition</u>: une série de la forme

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k (x-a)^k}_{=: b_k \in \mathbb{R}}$$

← puissances entières.

avec $a \in \mathbb{R}$, $a_k \in \mathbb{R}$ fixes et $x \in \mathbb{R}$ un paramètre est appelée une série entière.

On s'intéresse à la convergence de la série et à sa somme en fonction du choix du paramètre x.
Souvent on pose $x = a + \xi$ (étude proche de $x = a$).
Pour $r > 0$ on a : $|\xi| < r \Leftrightarrow |x-a| < r \Leftrightarrow x \in]a-r, a+r[$



vidéo B

10.6.2. Rayon de convergence

<u>Théorème</u>: il existe $r \in [0, \infty[\cup \{+\infty\}$ tel que la série entière

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k.$$

<u>converge absolument</u> pour $|\xi| < r$ (x dans l'intervalle $]a-r, a+r[$), et tel que la série diverge pour $|\xi| > r$ ($x \notin [a-r, a+r]$).

Remarque: à noter que le théorème implique que r est unique.

Terminologie: le nombre r dans le théorème est appelé <u>rayon de convergence</u> de la série.

Théorème: on a (voir 4.9 et en bas)

$$\boxed{r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}}} \qquad \text{(critère du limsup)}$$

ainsi que, si les limites existent,

$$r = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{|a_k|^{\frac{1}{k}}}\right) \qquad \text{(Cauchy)}$$

$$r = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}\right) = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \qquad \text{(d'Alembert)}$$

vidéo C

10.6.3. Démonstration et remarques

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k (x-a)^k}_{=:\, b_k \in \mathbb{R}}$$

et par les critères dans 4.9 on a convergence absolue si

$$q = \lim_{k\to\infty} |b_k|^{\frac{1}{k}} = |x-a| \cdot \underbrace{\lim_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}}_{=\frac{1}{r}} < 1 \qquad \text{(Cauchy)}$$

$$q = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right| = |x-a| \cdot \underbrace{\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|}_{=\frac{1}{r}} < 1 \qquad \text{(d'Alembert)}$$

$$q = \limsup_{k\to\infty} |b_k|^{\frac{1}{k}} = |x-a| \cdot \underbrace{\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}}_{=\frac{1}{r}} < 1 \qquad \text{(critère du limsup)}$$

ce qui est le cas si $|x-a| < r$. De même la série diverge si $q > 1$, ce qui est le cas si $|x-a| > r$. $\lrcorner$

<u>Remarques:</u>
- le théorème ne dit rien sur la convergence de la série pour $x = a+r$ et $x = a-r$. <u>A contrôler séparément !</u>
- si $r = +\infty$ la série converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- si $r = 0$ la série ne converge que pour $x = a$ et $s = a_0$.

<u>Remarque:</u> la raison pour laquelle r s'appelle "rayon de convergence" est que pour $r > 0$ la série converge en fait absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-a| < r$, c'est-à-dire pour z à l'intérieur d'un disque de rayon r.

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers la vidéo C	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 10

Développements limités

10.7. Fonctions définies par des séries entières

Nouveau point de vue: à toute suite de nombres réels $(a_k)_{k\geq 0}$, telle que

$$r = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}} > 0 \qquad (r\in\mathbb{R} \text{ ou } r=+\infty)$$

on peut associer une fonction f,

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

sur $D(f) =]a-r, a+r[\cup$ éventuellement les bords de l'intervalle, c-à-d. $x=a-r$ et $x=a+r$

Exemple (fonction hypergéométrique).

Pour $a,b,c\in\mathbb{R}$, on définit la fonction ${}_2F_1$ sur $]-1,1[$ par

$${}_2F_1(a,b;c;x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{1}{k!} x^k ,$$

où, pour $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$(\alpha)_k := \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1) & \text{si } k>0. \end{cases}$$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 10

Développements limités

10.8. Dérivées des fonctions définies par des séries entières

vidéo A

10.8.1. Dérivation terme par terme

Théorème: soit $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ avec un rayon de convergence $r>0$ ($r \in \mathbb{R}$ ou $r=+\infty$), alors on a

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_{k+1}(k+1)}_{\in \mathbb{R}} (x-a)^k \qquad (*)$$

sur $D(f') =]a-r, a+r[\cup$ éventuellement les bords de l'intervalle,

c-à-d. le rayon de convergence de $(*)$ est r.

Remarque: le domaine de définition de f et f' contient donc en tout cas l'intervalle ouvert $]a-r, a+r[$. A ceci s'ajoutent éventuellement des points au bord de l'intervalle, que l'on doit contrôler séparément.

vidéo B

10.8.2. Explications

i) on dérive "terme par terme"

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k\right)' \;\text{"="}\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (x-a)^{k-1} =$$

ceci n'est pas évident, on échange des limites !

voir 7.12, exemple

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) (x-a)^k$$

ii) si $r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ (d'Alembert pour f), alors

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}(k+1)}{a_{k+2}(k+2)}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}\right| \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k+2} = r \cdot 1 = r$$

(d'Alembert pour f').

vidéo C

10.8.3. Dérivée n-ème

<u>Théorème</u> Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ avec un rayon de convergence $r > 0$ ($r \in \mathbb{R}$ ou $r = +\infty$), alors on a

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} \frac{(k+n)!}{k!} (x-a)^k \qquad (*),$$

le rayon de convergence de $(*)$ est r, et $f \in C^\infty(]a-r, a+r[)$.

<u>Remarque</u>: de $(*)$ on obtient (sans surprise, voir la formule de Taylor) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = a_n n!$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)}$$

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers la vidéo C	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 10

Développements limités

10.9 Série de Taylor d'une fonction

<u>Remarque:</u> si f est une fonction de classe $C^\infty(I)$, I un intervalle ouvert, $a \in I$, on peut utiliser la formule de Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + r_n(x) \qquad (*)$$

pour $n \in \mathbb{N}$ arbitraire (mais $n < \infty$)

<u>Remarque:</u> si f est de classe $C^\infty(I)$, $a \in I$ et si pour un $x \in I$ on a que dans $(*)$

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0 \qquad (**)$$

on obtient (pour ce x) à partir de la formule de Taylor dans la limite $n \to \infty$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

<u>Conclusion:</u> si f est de classe $C^\infty(I)$, I un intervalle ouvert, $a \in I$, et s'il existe un intervalle ouvert $I_0 \subset I$, $a \in I_0$ tel que $\forall x \in I_0$ on a $(**)$, alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k, \quad x \in I_0 .$$

et on dit que f est <u>représentée sur I_0 par sa série de Taylor en a</u>.

Nomenclature: si $a=0$ la série de Taylor est aussi appelée la série de McLaurin

Remarque: on dit que f est représentée par sa série de Taylor en a, car au vu de ce qui précède (formule de Taylor avec reste et 10.8.3) on a toujours

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \; a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)}$$

Definition. soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide. Alors

$C^{\omega}(I) := \{ f : I \to \mathbb{R} :$ $\forall a \in I$, il existe $I_0 \subset I$, $a \in I_0$, tel que f soit représentée sur I_0 par sa série de Taylor en a $\}$

omega

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 10:

Développements limités

10.10 Exemple de base, la série géométrique

Soit $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\} \supset I =]-\infty, 1[$

Soit $I_0 =]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ (à titre d'exemple), et $a=0$

- on a $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) = \frac{1}{k!} \left.\dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}\right|_{x=0} = 1.$
- donc, formule de Taylor (théorème 1)

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{1}_{a_k} \cdot x^k + r_n(x), \quad x \in I_0$$

avec

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(u)\, x^{n+1} = \frac{1}{1-u} \left(\frac{x}{1-u}\right)^{n+1}$$

avec $u \in]0, x[$ pour $x > 0$ et $u \in]x, 0[$ pour $x < 0$.

- puisque $x \in I_0 =]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ on a $|x| < \frac{1}{4}$ et donc
$|u| < |x| < \frac{1}{4} \Rightarrow |1-u| \geq |1-|u|| = 1-|u| > \frac{3}{4}$,
et donc

$$|r_n(x)| \leq \frac{4}{3} \left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\right)^{n+1} = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

- ceci implique que

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{au moins pour } x \in I_0$$

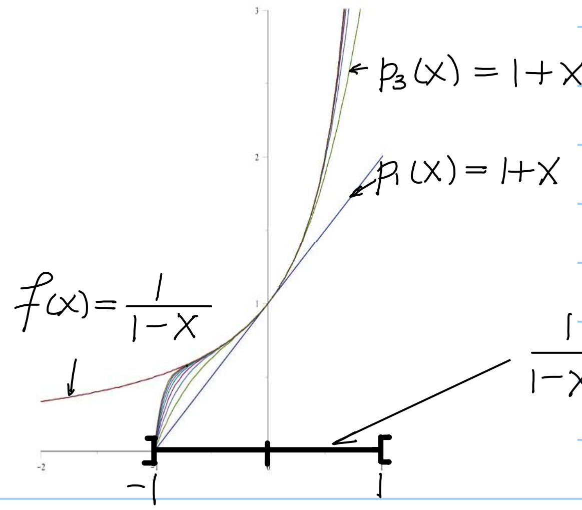
- en fait (voir 4.8) on a cette égalité dans cet exemple pour tout $x \in]-1, 1[$, c.-à-d. sur le domaine de définition de la fonction définie par la série

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, qui a un rayon de convergence $r=1$.

- mais attention

$$-1 = f(2) = \frac{1}{1-2} \neq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k = 1+2+4+8+\dots$$

cette série diverge !



$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad x \in]-1,1[$$

et ce n'est pas non plus toujours le cas que l'on a égalité sur tout l'intervalle de convergence de la série.

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 10:

Développements limités

10.11. Contre-exemple de base

La condition $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas suffisante pour que f puisse être représentée par une série entière. Soit.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Proposition : $f \in C^\infty(\mathbb{R})$: le seul point délicat est $a = 0$.

i) $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0 \Rightarrow f$ est continue en $x = 0$, (et donc sur $\mathbb{R}$)

ii) $$\left.\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ f'(x) &= 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0-} f'(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0+} f'(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f'(x) = 0 \Longrightarrow f'(0) = 0$$

voir Théorème 8.2 — Voir 9.2.3 exemple 4

iii) par récurrence on montre que f est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ et que $f^{(k)}(0) = 0$

Formule de Taylor avec reste $(a = 0)$

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) = 0$$

$x \leq 0$: $f(x) = 0 = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}_{=0} + \underbrace{r_n(x)}_{=0}$

$x > 0$: $f(x) = e^{-\frac{1}{x}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}_{=0} + r_n(x)$

$\Longrightarrow \quad r_n(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Donc, pour $x > 0$ $\lim_{n \to \infty} r_n(x) = e^{-\frac{1}{x}} = f(x)$

<u>Conclusion:</u> $f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, mais $f \notin C^{\omega}(\mathbb{R})$ "omega", les fonctions qui peuvent être représentées (en tout point $a \in \mathbb{R}$) par une série entière.

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 10

Développements limités

10.12. A (re-) connaître

Avec la même procédure que pour

$f(x) = \frac{1}{1-x}$ on trouve

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad x \in]-1, 1[.$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \qquad x \in]-1, 1[.$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} x^k \qquad x \in]-1, 1[. \quad (x \in]-1, 1]^{*)})$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (-1)^k x^{2k+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k x^{2k} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad x \in]-1,1[$$

Rappel: $$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$

*) Remarque: on a convergence pour $x=1$, c.-à-d.

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} x^k$$

(théorème de Abel), mais la convergence est très lente. Pour calculer $\ln(2)$ il vaut mieux utiliser la série de la manière suivante:

$$\ln(2) = -\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\ln\left(1+\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right)$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \left(-\tfrac{1}{2}\right)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \quad \text{(convergence rapide)}$$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 10

Développements limités

10.13 "Démonstration" de la formule d'Euler

On définit la fonction exponentielle pour $z \in \mathbb{C}$ par la série entière

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k.$$

On montre que $(e^z)' = e^z$ (dérivée dans $\mathbb{C}$)

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

etc.

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a:

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (ix)^k = \text{pair} + \text{impair}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k x^{2k}$$

$$+ i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (-1)^k x^{2k+1}$$

$$= \cos(x) + i \sin(x)$$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

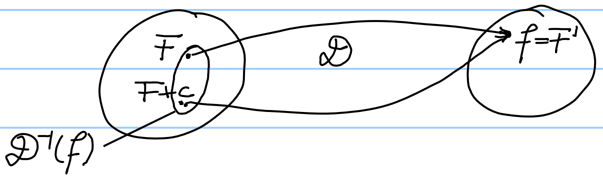
Chapitre II

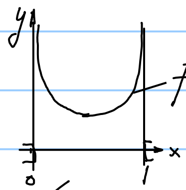
Intégrales indéfinies et définies

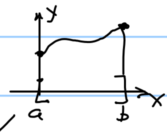
II.1 L'intégrale indéfinie

vidéo A

II.1.1. Motivation







$$\begin{aligned}
\mathcal{D} :\quad C^1(]a,b[) &\longrightarrow C^0(]a,b[) \supset C^0([a,b])\,,\ a<b.\\
F &\longmapsto \mathcal{D}(F) = F'\\
\mathcal{D}^{-1}(f) &\longleftarrow f
\end{aligned}$$

$\mathcal{D}$ n'est pas injective car $\mathcal{D}(F+c) = F'$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathcal{D}^{-1}(f) := \{ F \in C^1(]a,b[) : F' = f \in C^0(]a,b[) \}}$$

vidéo B

II.1.2. Définition de l'intégrale indéfinie

Définition soit $f \in C^0(]a,b[)$, $a<b$. Une primitive de f est une fonction $F \in C^1(]a,b[)$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a,b[$.

Remarque si $f \in C^0([a,b])$, $a<b$ alors $F \in C^1([a,b])$, car F est continue sur $[a,b]$ (voir plus loin) et par la continuité de f sur $[a,b]$ on trouve.

$$\lim_{x\to a+} F'(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = f(a) \overset{\text{théorème 8.2 bis}}{=\!=\!=\!=} F'(a)$$

$$\lim_{x\to b-} F'(x) = \lim_{x\to b-} f(x) = f(b) \overset{\text{théorème 8.2 bis}}{=\!=\!=\!=} F'(b)$$

Remarque: deux primitives d'une fonction donnée ne diffèrent que d'une constante. (voir 5.9.2, corollaire 1)

Attention! C'est ici que l'on a utilisé que les fonctions f sont définies sur un intervalle

Definition: on appelle intégrale indéfinie de f l'ensemble des primitives de f : $\mathcal{D}^{-1}(f)$

Notation pour $\mathcal{D}^{-1}(f)$: $\boxed{\int f(x)\,dx}$ ou encore $\int^x f(t)\,dt$

Remarque: l'application $\mathcal{D} : C^1(]a,b[) \to C^0(]a,b[)$ est linéaire : $\mathcal{D}(\alpha F + \beta G) = \alpha \mathcal{D}(F) + \beta \mathcal{D}(G)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $F, G \in C^1(]a,b[)$. $\mathcal{D}^{-1}$ est aussi linéaire, modulo $C \in \mathbb{R}$: $\int \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \cdot \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$

Video C

11.1.3. Exemples à connaître

Voir le tableau de la section 7.9

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$n \neq -1$, $C \in \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$)
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert) + C$	$C \in \mathbb{R}$.
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	$C \in \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	$C \in \mathbb{R}$
e^x	$e^x + C$	$C \in \mathbb{R}$

$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x + C$	$, x>0, C \in \mathbb{R}$
$f(x) \cdot f'(x)$	$\frac{1}{2} f(x)^2 + C$	$C \in \mathbb{R}$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln(\lvert f(x) \rvert) + C$	$C \in \mathbb{R}$
$\tan(x)$	$- \ln(\lvert \cos(x) \rvert) + C$	$C \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$	$C \in \mathbb{R}$
$\frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$	$\arctan(f(x)) + C$	$C \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	$C \in \mathbb{R}$
$e^{x^2} 2x$	$e^{x^2} + C$	$C \in \mathbb{R}$
$e^{x^2}(n \cdot x^{n-1} + 2x^{n+1})$	$x^n e^{x^2} + C$	$n \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{R}$

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers la vidéo C	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre II

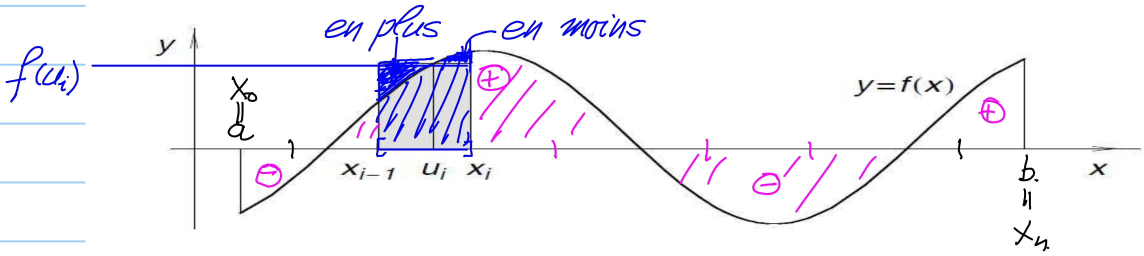
Intégrales indéfinies et définies

II.2. L'intégrale définie

II.2.1. Sommes de Riemann

Vidéo A

Soit $f \in C^0([a,b])$, $a < b$.



<u>Définition</u> soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une suite finie (x_i),
$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ est appelée une subdivision de l'intervalle $[a,b]$.

<u>Notation:</u> on écrira $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ pour (l'ensemble des points d') une subdivision de $[a,b]$.

<u>Définition</u> soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ une subdivison de $[a,b]$
$u_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Alors on appelle

$$S(\sigma, u_1 \dots u_n) := \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1})$$

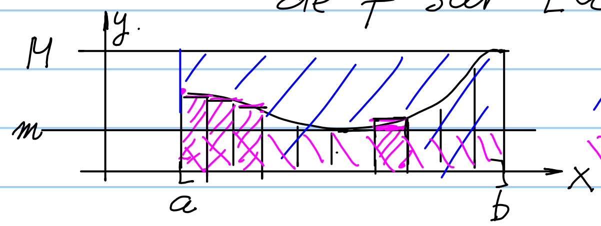
la somme de Riemann de f pour la subdivision σ et le choix des $u_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 \dots n$.

<u>Remarque:</u> si $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, alors la somme de Riemann est une approximation de la surface sous le graphe de f.

vidéo B

II.2.2. Sommes inférieures et supérieures

Remarque: puisque la fonction f est continue sur $[a,b]$ on a $m(b-a) \leq S(\sigma, u_1 \dots u_n) \leq M\cdot(b-a)$, où m et M sont le minimum et le maximum de f sur $[a,b]$.



$/// = M\cdot(b-a)$

$\backslash\backslash\backslash = m\cdot(b-a)$.

Remarque: puisque f est continue sur $[a,b]$, f est continue sur $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1,\dots,n$ et f admet un minimum m_i et un maximum M_i sur $[x_{i-1}, x_i]$ et

$m(b-a) \leq \underline{S}(\sigma) \leq S(\sigma, u_1 \dots u_n) \leq \bar{S}(\sigma) \leq M(b-a)$

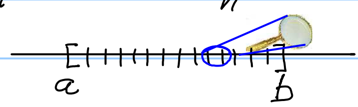
où :

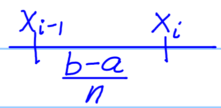
$$\underline{S}(\sigma) := \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}), \quad \bar{S}(\sigma) := \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

Définition: donné une subdivision $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ on définit $\Delta x \equiv \Delta x(\sigma) := \text{maximum}\{x_1 - x_0, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ le "pas" de la subdivision.

Exemple: découpage régulier

On définit $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$, $i = 0, \dots, n$ avec $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.





$n=1 \qquad \sigma_1 = \{x_0 = a, \; x_1 = b\}$

$n=2 \qquad \sigma_2 = \{x_0 = a, \; x_1 = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}, \; x_2 = b\}$

$n = 2^k, \quad \sigma_k = \{x_i = a + \frac{b-a}{2^k} i, \; i = 0, \dots, n = 2^k\}$.

et on a $\sigma_{k+1} \supset \sigma_k$.

vidéo C

11.2.3. Définition de l'intégrale définie

Théorème/Définition (intégrale définie de f sur [a,b])

Soit $f \in C^\circ([a,b])$, $\sigma_k = \{x_0, \dots, x_{n(k)}\}$, $k \in \mathbb{N}^*$ une suite de subdivisions telle que $\forall k$, $\sigma_{k+1} \supset \sigma_k$ et $\lim_{k\to\infty} \Delta x(\sigma_k) = 0$. Alors la suite $\underline{S}(\sigma_k)$ est croissante, la suite $\overline{S}(\sigma_k)$ est décroissante et puisque $\forall k$, $\underline{S}(\sigma_k) \leq \overline{S}(\sigma_k)$ les deux suites admettent des limites $\underline{S} = \lim_{k\to\infty} \underline{S}(\sigma_k)$ et $\overline{S} = \lim_{k\to\infty} \overline{S}(\sigma_k)$. Ces limites sont indépendantes du choix de la suite des subdivisions et $\underline{S} = \overline{S} =: S = \lim_{k\to\infty} S(\sigma_k, u_1, \dots, u_{n(k)})$, où pour chaque k, le choix des $u_i \in [x_{i-1}, x_i]$ est arbitraire. Le nombre S est appelé intégral définie de f sur $[a,b]$.

Explications

concept pas introduit dans ce cours

La continuité (uniforme) de f sur $[a,b]$ implique que $\forall \varepsilon > 0$ il existe k_0 tel que $\forall k \geq k_0$, $0 \leq M_i - m_i \leq \varepsilon$, $i = 1..n(k)$

Ceci implique

$$0 \leq \overline{S}(\sigma_k) - \underline{S}(\sigma_k) \leq \sum_{i=1}^{n(k)} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon\,(b-a).$$

d'où $\overline{S} = \underline{S}$. L'indépendance de la suite des subdivisions est une conséquence du fait que si σ_k^1 et σ_k^2 sont deux suites de subdivisions alors $\sigma_k = \sigma_k^1 \cup \sigma_k^2$ en est aussi une et $\underline{S}(\sigma_k^1) \leq \underline{S}(\sigma_k) \leq \overline{S}(\sigma_k) \leq \overline{S}(\sigma_k^2)$.

Notation: on écrit $(S =) \int_a^b f(x)\,dx$ pour l'intégrale définie de f sur $[a,b]$.

Remarque: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(\xi)\,d\xi$ (le choix du nom de la variable d'intégration est irrelevant)

Définition: $b = a$: $\int_a^a f(x)\,dx := 0$

$b < a$: $\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers la vidéo C	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre II

Intégrales indéfinies et définies

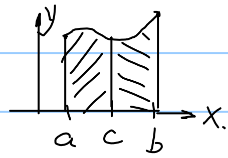
II.3. Propriétés des intégrales définies

Soit $f, g \in C^0([a,b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i) $\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta\, g(x))\, dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$

linéarité de l'intégrale

ii) soit $a < c < b$



$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$ subdivision du domaine

iii) si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$
alors
$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

Remarque : puisque $\forall x \in [a,b]$

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

on obtient de iii) en particulier que

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

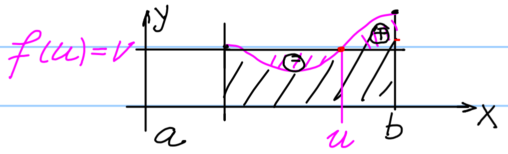
Chapitre 11

Intégrales indéfinies et définies

11.4. Théorème de la moyenne

vidéo A

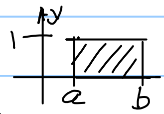
11.4.1. Enoncé du théorème



$\oplus + \ominus = 0$

Théorème: soit $f : D \to \mathbb{R}$, $[a,b] \subset D$, $a<b$, f continue sur $[a,b]$ (c.-à-d. $f \in C^0([a,b])$). Alors il existe $u \in]a,b[$ tel que

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(u)\,(b-a)} = f(u) \cdot \int_a^b 1 \cdot dx$$



Remarque: $f(u) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ = la valeur moyenne de f sur $[a,b]$

Théorème de la moyenne généralisé

Soit $f, g \in C^0([a,b])$ et $\forall x \in [a,b]$, $g(x) > 0$. Alors il existe $u \in]a,b[$ tel que

$$\boxed{\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx = f(u) \cdot \int_a^b g(x)\,dx}$$

Remarque: pour $g(x) = 1$ c'est le théorème de la moyenne

vidéo B

11.4.2. Démonstration du théorème

Démonstration : soient m et M le minimum et le maximum de f sur $[a,b]$. Alors, puisque $g(x) > 0$,

$$\forall x \in [a,b], \quad m\, g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq M\, g(x)$$

$\xRightarrow[\text{propriétée iii), i)}]{}$

$$\boxed{m \cdot \int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx \leq M \int_a^b g(x)\, dx}$$

et il existe donc $\nu \in [m, M]$ tel que

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = \nu \cdot \int_a^b g(x)\, dx.$$

et par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $u \in]a,b[$ tel que $\nu = f(u)$.

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 11

Intégrales indéfinies et définies

11.5 Théorème fondamental du calcul intégral

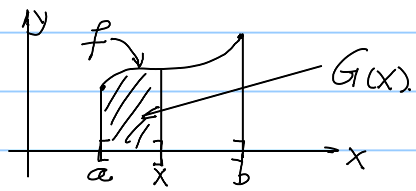
vidéo A

11.5.1. Enoncé du théorème

Théorème: soit $f \in C^0([a,b])$, $a<b$. Alors

i) la fonction $G :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$



est une primitive de f.

ii) si F est une primitive de f, alors

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Remarque: par le théorème de la moyenne, puisque $f \in C^0([a,b])$ (intervalle fermé) est une fonction bornée, G et par conséquence F peuvent être prolongées par continuité à $[a,b]$. En particulier on a $G(a) = \lim_{x \to a+} G(x) = 0$ et

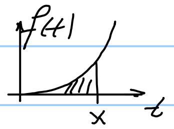
$$G(b) = \lim_{x \to b-} G(x) = \int_a^b f(t)\, dt$$

Notation: on écrira $\int_a^b f(x)\, dx = \left[F(x) \right]_a^b \equiv F(b) - F(a)$

Vidéo B

11.5.2 Exemple

$f(x) = x^2$ sur $[0,1]$ (à titre d'exemple)

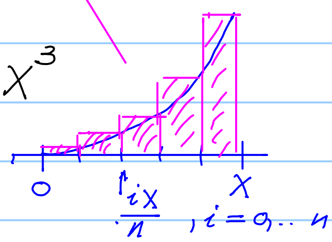
$$G(x) = \int_0^x f(t)\,dt =$$ 

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x}{n} i\right) \frac{x}{n} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x}{n}\right)^2 i^2 = x^3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \ldots = x^3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3} x^3$$

démonstration par récurrence.



et on a que $G'(x) = x^2 = f(x)$ sur $[0,1]$.

Vidéo C

11.5.3. Démonstration du théorème

i) Soit $x \in]a,b[$. Alors

$$G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h} \left(\cancel{\int_a^x f(t)\,dt} + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^x f(t)\,dt} \right) \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt \right) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h} f(u) \cdot h \right) =$$

par le théorème de la moyenne

$$\exists\, u \in \begin{cases}]x, x+h[\,, & \text{si } h > 0, \\ ]x+h, x[\,, & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(u) = f(x)$$

car $u \to x$ lorsque $h \to 0$ et f est continue en x.

ii) Soit F une primitive de f. Puisque par i) G est aussi une primitive de f, il existe (voir 11.1.2) une constante $C \in \mathbb{R}$, telle que $\forall x \in]a,b[$, $F(x) = G(x) + C$ et par le prolongement par continuité en a et b, que

$$\forall x \in [a,b] \quad , \quad F(x) = G(x) + C \; ;$$

en $x = a$: $F(a) = G(a) + C = 0 + C \Rightarrow C = F(a)$.

en $x = b$: $F(b) = G(b) + C = \underbrace{G(b)}_{= \int_a^b f(t)\,dt} + F(a)$.

d'où $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

11.5.4 Surjectivité de l'application dérivée

Remarque: pour f continue sur $]a,b[$ la fonction $G :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$G(x) = \int_c^x f(t)\,dt \text{ est une primitive de } f$$

pour tout choix de $c \in]a,b[$. L'application $\mathcal{D} : C^1(]a,b[) \longrightarrow C^0(]a,b[)$, $F \longmapsto \mathcal{D}(F) = F'$ est donc surjective.

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers la vidéo C	
Lien vers la vidéo D	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 11

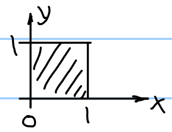
Intégrales indéfinies et définies

11.6. Premiers exemples

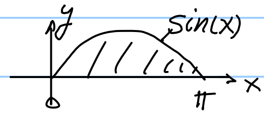
vidéo A

11.6.1. Calculs d'intégrales

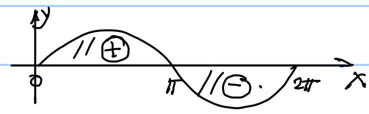
1) $\int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1$



2) $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -(-1) - (-(1)) = 2$



3) $\int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_0^{2\pi} = -1 - (-1) = 0$



4) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C \quad , C \in \mathbb{R}$

5) $\int \frac{\sinh(x)}{e^x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+1}\,\frac{e^{-x}}{e^{-x}}\,dx -$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1-(e^{-x})^2}{1+e^{-x}}\,dx = \frac{1}{2}\int (1-e^{-x})\,dx = \frac{1}{2}(x+e^{-x}) + C$$

vidéo B

11.6.2 Estimation d'intégrales

Proposition: $$\frac{2}{7} \leqslant \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{5+\sqrt[3]{x}}\,dx}_{=: I} \leqslant \frac{2}{5} \qquad (*)$$

Démonstration:

On a $\sin(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0,\pi]$, et la fonction

$$f(x) = \frac{1}{5+\sqrt[3]{x}}$$

est décroissante sur $[0,8] \supset [0,\pi]$ ce qui implique que

$$\frac{\sin(x)}{5} \geqslant \frac{\sin(x)}{5+\sqrt[3]{x}} \geqslant \frac{\sin(x)}{5+\sqrt[3]{\pi}} \geqslant \frac{\sin(x)}{7}, \quad x \in [0,\pi]$$

ce qui implique $(*)$ par la propriété iii) de l'intégrale $\square$

<u>Remarque:</u> on peut aussi argumenter avec le théorème de la moyenne généralisé en posant $g(x) = \sin(x)$. On a alors pour un certain $u \in]0,\pi[$.

$$I = f(u) \int_0^{\pi} g(x)\,dx = f(u) \cdot 2$$

et donc $(*)$, vu que $\frac{1}{7} \leqslant f(u) \leqslant \frac{1}{5}$

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 11

Intégrales indéfinies et définies

11.7 Méthodes d'intégration

vidéo 1

11.7.1. Intégration immédiate

Voir le tableau

1) $a>0$, $a\neq 1$

$$\int a^x\,dx = \int e^{\ln(a)\cdot x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\ln(a)}\,e^{\ln(a)\cdot x} + C = a^x\,\frac{1}{\ln(a)} + C$$

2) $$\int f(x)\cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{2}\,f(x)^2 + C$$

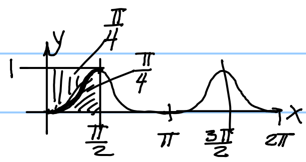
exemple: $$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x)^2 + C \\ -\frac{1}{2}\cos(x)^2 + C \end{cases}$$

3) $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(|f(x)|) + C$$

exemple: $$\int \tan(x)\,dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx$$

$$= -\ln(|\cos(x)|) + C$$

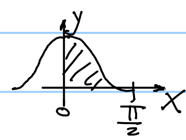
4) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^2\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\,(1-\cos(2x))\,dx$$



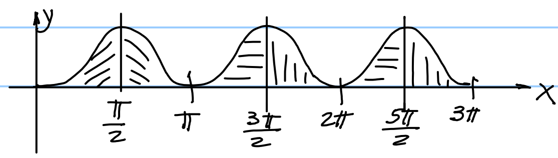
$$= \left[\frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

4') $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin(x)^2)\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$



5) $$\int_0^{n\cdot\frac{\pi}{2}} \sin(x)^2\,dx = n\cdot\frac{\pi}{4}$$

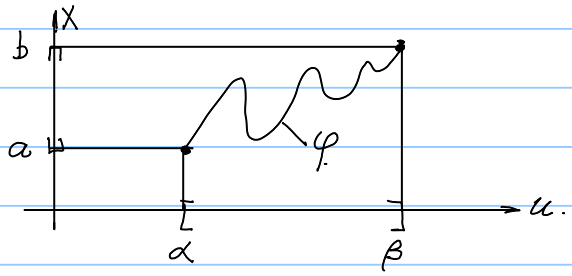


vidéo B

11.7.2. Intégration par changement de variable

Théorème: soit $f: D \to \mathbb{R}$, $[a,b] \subset D$, $a<b$, f continue sur $[a,b]$.
Soit $\varphi: [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$, $\varphi \in C^1([\alpha,\beta])$.
En plus on demande que

$$\boxed{\varphi(\alpha) = a \quad , \quad \varphi(\beta) = b}$$



Alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)\,du}$$

Démonstration

Soit F une primitive de f sur $[a,b]$. Alors, la fonction $G(u) = F(\varphi(u))$ est une primitive de $f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)$ sur $[\alpha,\beta]$ car (dérivation en chaîne):

$$G'(u) = F'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) = f(\varphi(u))\,\varphi'(u)$$

Donc $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du = [G(u)]_\alpha^\beta$

$$= G(\beta) - G(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

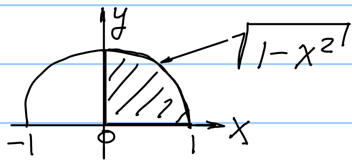
Remarque: si φ est bijective, alors

$$F(x) = F(\varphi(\varphi^{-1}(x))) = G(\varphi^{-1}(x))$$

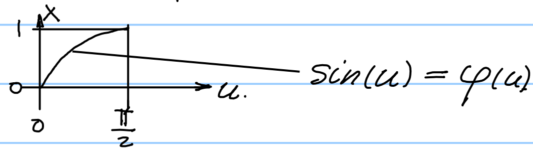
Vidéo G

11.7.3. Exemples

1) $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx \qquad = \frac{\pi}{4}$



On pose $\quad x = \varphi(u) = \sin(u)$



$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1-\sin(u)^2}}_{\substack{=|\cos(u)| \\ = \cos(u),\ u\in[0,\frac{\pi}{2}]}} \cdot \cos(u)\, du$$

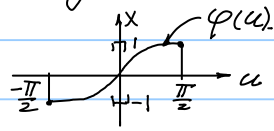
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2\, du = \frac{\pi}{4}$$

voir plus haut

2) cas d'une intégrale indéfinie (voir la remarque)

$F(x) = \int \sqrt{1-x^2}\, dx \qquad$ (on cherche une primitive)

$x = \varphi(u) = \sin(u) \quad , \underset{u}{\underset{\Downarrow}{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}} \longrightarrow \underset{x}{\underset{\Downarrow}{[-1,1]}}$ bijective



$$G(u) = \int \sqrt{1-\sin(u)^2} \cdot \cos(u)\, du$$

$$= \int \cos(u)^2\, du =$$

ici on utilise que
$\cos(u) \geq 0$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$= \int \frac{1}{2}(1+\cos(2u))\, du = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\underbrace{\sin(2u)}_{\substack{\| \\ 2\sin(u)\cdot\cos(u)}} + C$$

Donc $F(x) = G(\varphi^{-1}(x)) = G(\arcsin(x))$ $\qquad \overset{\|}{\sqrt{1-\sin(u)^2}}$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{1}{2}x\cdot\sqrt{1-x^2} + C \quad , x \in [-1,1]$$

Vidéo D

11.7.4. Intégration par parties

Théorème Soient $f, g \in C^1([a,b])$. Alors

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = \left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$$

Remarque: en pratique on écrit l'identité plutôt comme

$$\boxed{\int_a^b \underset{\uparrow}{f(x)} \cdot \underset{\downarrow}{g(x)}\, dx = \left[F(x)\, g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)\, g'(x)\, dx}$$

avec $f \in C^0([a,b])$, $g \in C^1([a,b])$ et F une primitive de f. (les $\uparrow\downarrow$ sont une aide mnémotechnique)

Démonstration du théorème

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x) \qquad \Big| \int_a^b \_\_\, dx$$

et donc

$$\left[f(x)\cdot g(x)\right]_a^b = \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx + \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$$

Cas d'une intégrale indéfinie

$$\int \underset{\uparrow}{f(x)}\, \underset{\downarrow}{g(x)}\, dx = F(x)\, g(x) - \int F(x)\, g'(x)\, dx$$

vidéo E

11.7.5. Exemples

1) $$\int_0^1 e^x \cdot x\,dx = [e^x \cdot x]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot 1\,dx$$
$$= e - [e^x]_0^1 = e - (e-1) = 1$$

2) $$\int_0^1 e^x x^2\,dx = [e^x \cdot x^2]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot (2x)\,dx$$
$$= e - 2 \cdot \int_0^1 e^x x\,dx = e - 2$$

3) $$\int \ln(x)\,dx = \int 1 \cdot \ln(x)\,dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx$$
$$= x \cdot \ln(x) - x + C, \quad x>0.$$

vidéo F

11.7.6 Intégration par récurrence

$$\boxed{I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.}$$

$I_0 = x + C$
$I_1 = \arctan(x) + C$

$$I_n \underset{n\in\mathbb{N}^*}{=\!=} \int 1 \cdot \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$$
$$= x \cdot \frac{1}{(x^2+1)^n} + \underbrace{\int x \frac{2n \cdot x}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx}_{= 2n \int \frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx.}$$
$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n I_n - 2n I_{n+1}.$$

Donc

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n, \quad n \in \mathbb{N}^*}$$

<u>Exemple:</u> $I_2 = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$

11.7.7. Intégration de puissances de sin et cos

vidéo 5

$$A_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^{2n}\, dx \quad , n \in \mathbb{N}$$

$$A_n \underset{n\in\mathbb{N}^*}{=\!=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \cos(x)^{2n-1} dx$$

$$= \left[\sin(x)\cos(x)^{2n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n-1) \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \overbrace{\sin(x)^2}^{1-\cos(x)^2} \cos(x)^{2n-2} dx}_{\overset{!!}{B_n}}$$

$$= 0 - 0 + (2n-1) A_{n-1} - (2n-1) A_n$$

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \cos(x)^{2n} dx$$

$$\underset{n\in\mathbb{N}^*}{=\!=} \left[x \cdot \cos(x)^{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \underbrace{\cos(x)^{2n-1}\sin(x)}\, dx$$

$$= 0 - 0 + 2n \left[\tfrac{1}{2} x^2 \cos(x)^{2n-1} \sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$- (2n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} x^2 \Big(-(2n-1)\cos(x)^{2n-2} \cdot \underbrace{\sin(x)^2}_{=1-\cos(x)^2} + \cos(x)^{2n}\Big) dx$$

$$= n\cdot(2n-1) \cdot \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x)^{2n-2} dx}_{= C_{n-1}.} - 2n^2 \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x)^{2n} dx.}_{=: C_n}$$

i) $A_n = \dfrac{2n-1}{2n} A_{n-1} \quad , n \in \mathbb{N}^*, \quad A_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = \frac{\pi}{2}$

ii) $B_n = \dfrac{1}{2n-1} A_n \overset{i)}{=} \dfrac{1}{2n} A_{n-1} \quad , n \in \mathbb{N}^*$

iii) $A_n = n\cdot(2n-1)\, C_{n-1} - 2n^2 C_n \quad , n \in \mathbb{N}^*$

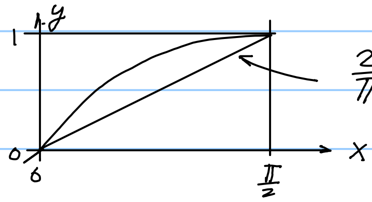
iv) $C_n = \dfrac{2n-1}{2n} C_{n-1} - \dfrac{1}{2n^2} A_n \quad , n \in \mathbb{N}^*, \quad C_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3$

v) iii) $\Longrightarrow \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{2n-1}{n} \dfrac{C_{n-1}}{A_n} - 2\dfrac{C_n}{A_n} \overset{i)}{=} 2\left(\dfrac{C_{n-1}}{A_{n-1}} - \dfrac{C_n}{A_n}\right), n \in \mathbb{N}^*$

vidéo

11.7.8. Application aux séries numériques

Comparaison de A_n, B_n et C_n :



$$\frac{2}{\pi} x \leqslant \sin(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

$$0 \leqslant C_n \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 B_{n+1} \overset{ii)}{=} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{2n+2} A_n \quad , n \in \mathbb{N}.$$

donc
$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{C_n}{A_n} \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{2n+2}\right) = 0.$$

De v) on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{C_{k-1}}{A_{k-1}} - \frac{C_k}{A_k} \right) = 2 \frac{C_0}{A_0} - 2 \frac{C_n}{A_n}.$$

et dans la limite $n \longrightarrow \infty$ on obtient

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2 \frac{C_0}{A_0} = 2 \cdot \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{(voir 3.9.2. exemple 2)}}$$

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers la vidéo C	
Lien vers la vidéo D	
Lien vers la vidéo E	
Lien vers la vidéo F	
Lien vers la vidéo G	
Lien vers la vidéo H	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 12

Intégration (chapitres choisis)

12.1. Intégration d'un développement limité

vidéo A

12.1.1 Intégration d'une fonction $C^n(\mathbb{R})$

Proposition Soit $f \in C^n(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et le développement limité

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + (x-a)^n \cdot \varepsilon_1(x)$$

continue sur $\mathbb{R}$

avec $\lim_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0$. Alors

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt =$$

$$= f(a)(x-a) + \frac{1}{2} f'(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n)}(a)(x-a)^{n+1} + (x-a)^{n+1} \varepsilon_2(x)$$

continue sur $\mathbb{R}$

avec $\lim_{x \to a} \varepsilon_2(x) = 0$.

Démonstration

Pour $x > a$ on a par le théorème de la moyenne généralisé que

$$\int_a^x (t-a)^n \varepsilon_1(t)\,dt = \varepsilon_1(u) \int_a^x (t-a)^n dt = \frac{\varepsilon_1(u)}{n+1} (x-a)^{n+1}$$

avec $u \in \,]a, x[$ ($u = u(x)$ dépend de x) et on obtient que

$$\varepsilon_2(x) = \frac{1}{n+1} \varepsilon_1(u(x)) \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

Il suffit donc d'intégrer terme par terme le développement limité de f pour trouver le résultat. L'argument est analogue pour $x < a$. $\square$

video B

12.1.2. Exemple

Soit $F(x) = \int_0^x \underbrace{\sin(\cos(t))}_{\text{une fonction paire}} \, dt \quad \in C^\infty(\mathbb{R})$, impaire

Calculer le $\underbrace{\text{développement limité d'ordre 5}}_{=: DL_5}$ de F autour de zéro.

On a besoin du DL_4 de $f(t) = \sin(\cos(t))$ autour de zéro.

i) $\underbrace{\cos(t)}_{\substack{\text{III} \\ X}} = 1 \underbrace{- \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{24} t^4 + t^4 \varepsilon(t)}_{\substack{\text{III} \\ T}}$, $\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$

et $T \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow 0$.

ii) il nous faut le DL_2 de $\sin(X)$ autour de $1 = \cos(0)$ (car $\underline{T \sim t^2}$ pour t proche de zéro). On a

$$\sin(X) = \sin(1) + \cos(1)(X-1) - \frac{1}{2}\sin(1)(X-1)^2 + (X-1)^2 \cdot \varepsilon(X)$$

où $\lim_{X \to 1} \varepsilon(X) = 0$

iii) $f(t) = \sin(1) + \cos(1)\, T - \frac{1}{2}\sin(1)\, T^2 + T^2 \varepsilon(T)$

où $\lim_{T \to 0} \varepsilon(T) = 0$. Donc

$$f(t) = \sin(1) + \cos(1)\left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + t^4\varepsilon(t)\right) - \frac{1}{2}\sin(1)\left(-\frac{1}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t)\right)^2 + t^4\varepsilon(t)$$

$$= \sin(1) - \frac{1}{2}\cos(1)\, t^2 + \left(\frac{1}{24}\cos(1) - \frac{1}{8}\sin(1)\right) t^4 + t^4\varepsilon(t)$$

où $\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$

IV) $F(x) = \sin(1) \cdot x - \frac{1}{6}\cos(1)\, x^3 + \left(\frac{1}{120}\cos(1) - \frac{1}{40}\sin(1)\right) x^5 + x^5 \varepsilon(x)$

où $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 12

Intégration (chapitres choisis)

12.2 Intégration des séries entières

Théorème une série entière peut être intégrée terme par terme. Soit

$(x-a)^0 \equiv 1$ par convention

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = a_0 + a_1(x-a) + \dots$$

($a_k \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ sont donnés) avec un rayon de convergence $r > 0$ ($r \in \mathbb{R}$ ou $r = +\infty$). Alors

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{k+1}(x-a)^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} \frac{1}{k}(x-a)^k$$

et le rayon de convergence de la série pour F est r.

Démonstration: $F(a) = 0$, $F'(x) = f(x)$. $\lrcorner$

Exemple:

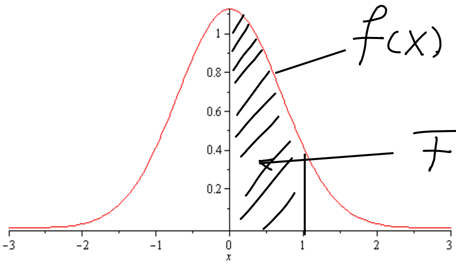
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

Soit $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-1)^k x^{2k}$

Alors $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

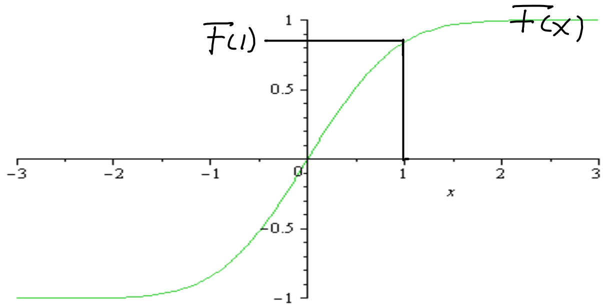
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$$

$$=: \operatorname{erf}(x)$$



$f(x)$

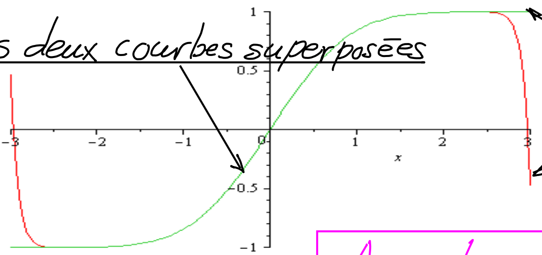
$F(1) = \int_0^1 f(t)\,dt$



$F(1)$

$F(x)$

<u>les deux courbes superposées</u>



$\mathrm{erf}(x)$

$$\sum_{k=0}^{37} \frac{1}{k!}\,\frac{1}{2k+1}\,(-1)^k\, x^{2k+1}$$

$\boxed{\text{A noter que } \lim_{x\to\infty} \mathrm{erf}(x) = 1}$

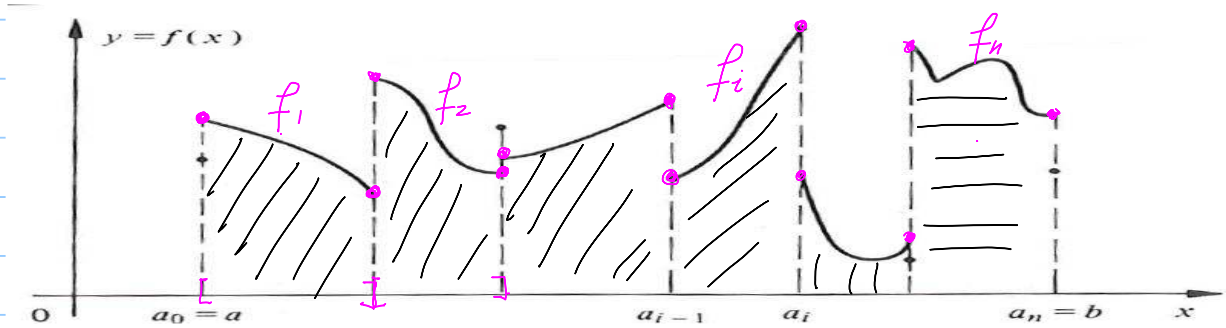
Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 12

Intégration (chapitres choisis)

12.3. Intégration des fonctions continues par morceaux

Définition une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a<b$ est dite continue par morceaux, s'il existe une subdivision $\sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$ de $[a,b]$ et n fonctions continues $f_i : [a_{i-1}, a_i] \longrightarrow \mathbb{R}$, $i=1\dots n$, telles que $f_i(x) = f(x)$ pour tout $x \in \,]a_{i-1}, a_i[$, $i=1,\dots,n$.

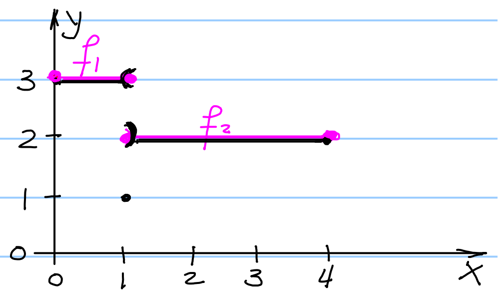


Définition Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. Alors

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(x)\,dx$$

Exemple:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 4 \end{cases}$$



$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^1 3\cdot dx + \int_1^4 2\,dx = 3 + 6 = 9.$$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 12

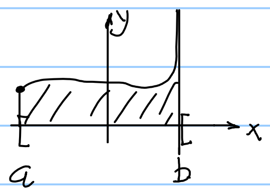
Intégration (chapitres choisis)

12.4. Intégrales généralisées (ou impropres)

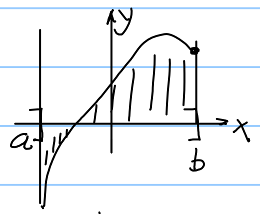
vidéo A

12.4.1. Exposition des trois types

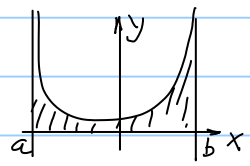
i) type 1 : f continue sur $[a,b[$ ou $]a,b]$ ou $]a,b[$.
$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.



$$\int_a^{b-} f(x)\,dx$$

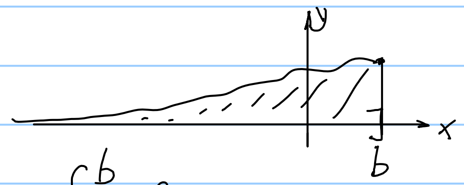


$$\int_{a+}^{b} f(x)\,dx$$

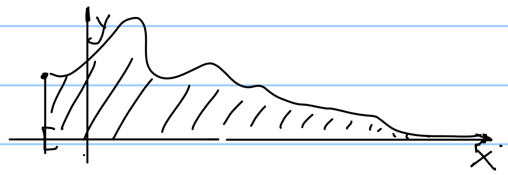


$$\int_{a+}^{b-} f(x)\,dx.$$

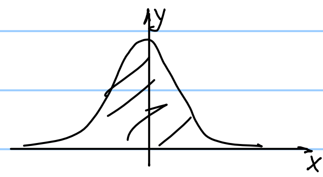
ii) type 2 : f continue sur $]-\infty, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, +\infty[$



$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

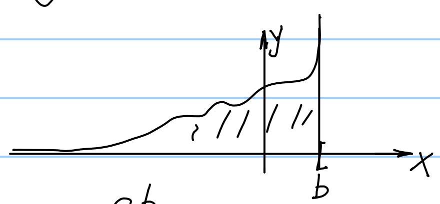


$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

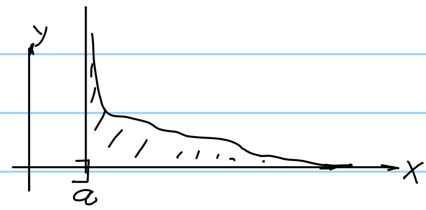


$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

iii) type 3 combinaison de i) et ii)

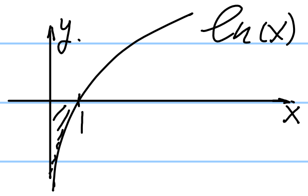


$$\int_{-\infty}^{b-} f(x)\,dx$$

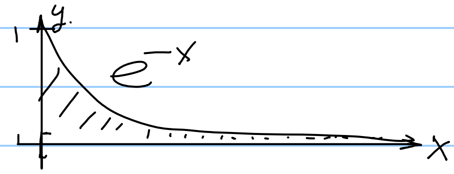


$$\int_{a+}^{+\infty} f(x)\,dx$$

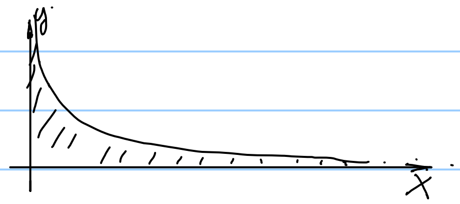
Exemples explicites



$$\int_{0+}^{1} \ln(x)\,dx = ?$$ type 1



$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx = ?$$ type 2



$$\int_{0+}^{+\infty} e^{-x}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = ?$$ type 3

vidéo B

12.4.2. Intégrales du type 1

Définition (type 1)

- Si f est continue sur $[a,b[$ — f continue sur $[a,\beta]$

$$\int_{a}^{b-} f(x)\,dx := \lim_{\beta\to b-} \int_{a}^{\beta} f(x)\,dx \quad , a<\beta<b$$

- Si f est continue sur $]a,b]$ — f continue sur $[\alpha,b]$

$$\int_{a+}^{b} f(x)\,dx := \lim_{\alpha\to a+} \int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx \quad , a<\alpha<b$$

- Si f est continue sur $]a,b[$ — $\begin{cases} a<\alpha<\beta<b \\ f \text{ continue sur } [\alpha,\beta] \end{cases}$

$$\int_{a+}^{b-} f(x)\,dx := \lim_{\substack{\alpha\to a+\\ \beta\to b-}} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

$\left\{\begin{array}{l}\text{une limite après} \\ \text{l'autre, l'ordre} \\ \text{est irrelevant.}\end{array}\right.$

vidéo C

12.4.3. Intégrales du type 2

Définition (type 2)

- Si f est continue sur $[a,+\infty[$, alors

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)\,dx \quad , \quad a < R$$

f continue sur $[a,R]$

- Si f est continue sur $]-\infty, b]$, alors

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx := \lim_{R\to-\infty} \int_R^b f(x)\,dx \quad , \quad R < b$$

f continue sur $[R,b]$

- Si f est continue sur $]-\infty,+\infty[\equiv \mathbb{R}$, $R_1 < R_2$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{\substack{R_1\to-\infty \\ R_2\to+\infty}} \int_{R_1}^{R_2} f(x)\,dx$$

une limite après l'autre, l'ordre est irrelevant.

vidéo D

12.4.4. Intégrales du type 3

Définition (type 3)

Si f est continue sur $]a,+\infty[$ ou $]-\infty, b[$, alors

$$\int_{a+}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{\substack{\alpha\to a+ \\ R\to+\infty}} \int_\alpha^R f(x)\,dx \quad , \quad a < \alpha < R < +\infty$$

$$\int_{-\infty}^{b-} f(x)\,dx := \lim_{\substack{\beta\to b- \\ R\to-\infty}} \int_R^\beta f(x)\,dx \quad , \quad -\infty < R < \beta < b$$

une limite après l'autre, l'ordre est irrelevant.

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers la vidéo C	
Lien vers la vidéo D	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 12

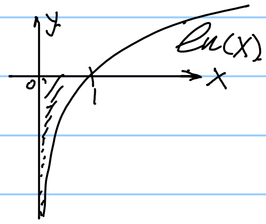
Intégration (chapitres choisis)

12.5. Exemples d'intégrales généralisées

vidéo A

12.5.1 Exemples (type 1)

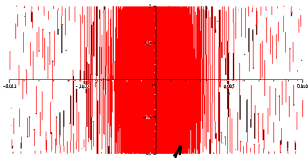
1) $\displaystyle\int_{0+}^{1} \ln(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} 1 \cdot \ln(x)\,dx =$



$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left([x \cdot \ln(x)]_{\varepsilon}^{1} - \int_{\varepsilon}^{1} x \cdot \frac{1}{x}\,dx \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(0 - \varepsilon \cdot \ln(\varepsilon) - [x]_{\varepsilon}^{1} \right) = \lim_{\varepsilon\to 0+} (-1+\varepsilon) = -1.$$

2) $\displaystyle\int_{0+}^{1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx := \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}}\, x^2\,dx =$



$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\left[\cos\left(\frac{1}{x}\right) x^2\right]_{\varepsilon}^{1} - 2 \cdot \int_{\varepsilon}^{1} \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x}_{\text{continue sur } [0,1] \text{ par prolongement continu}}\,dx \right)$$

$$= \cos(1) - 2\int_{0}^{1} \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x}_{\text{pas de fonction élémentaire comme primitive mais l'intégrale est bien définie}}\,dx$$

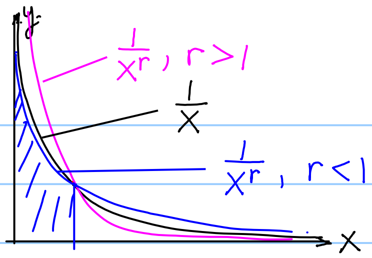
[car $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} f(x)\,dx$ pour f une fonction continue sur $[0,1]$]

vidéo B

12.5.2. Les fonctions $\frac{1}{x^r}$, $r>0$, sur $]0,1]$

Pour $r>0$, $r\neq 1$ on a :

$$\int_{0+}^{1} \frac{1}{x^r}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x^r}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left[\frac{1}{1-r}\,\frac{1}{x^{r-1}}\right]_{\varepsilon}^{1} =$$



$$= \lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-r}\,\frac{1}{\varepsilon^{r-1}} \right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } r>1 \\ \frac{1}{1-r} & \text{si } r<1. \end{cases}$$

et pour $r=1$ on trouve:

$$\int_{0+}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \left[\ln(x)\right]_{\varepsilon}^{1} =$$

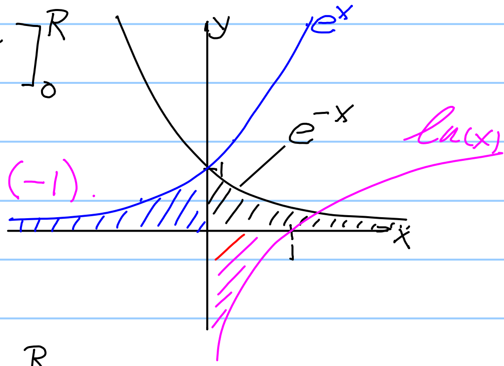
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(-\ln(\varepsilon)\right) = +\infty$$

vidéo C

12.5.3 Exemples (type 2)

1) $$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-x}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^R$$

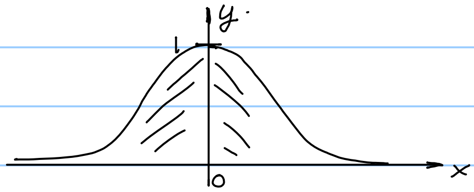
$$= \lim_{R\to+\infty} \left(-e^{-R} + e^{-0}\right) = 1 = 1 = -(-1).$$

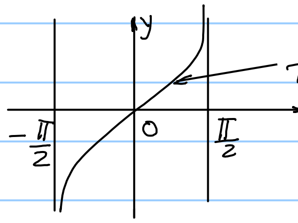


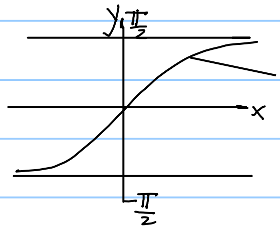
2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\cdot\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\cdot \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= 2\cdot \lim_{R\to\infty} \left[\arctan(x)\right]_0^R =$$

$$= 2\cdot \lim_{R\to\infty} \arctan(R) = \pi.$$





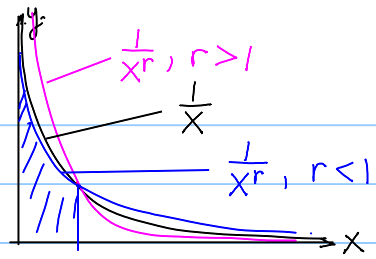


vidéo D

12.5.4. Les fonctions $\frac{1}{x^r}$, $r>0$, sur $[1,+\infty[$

Pour $r>0$, $r\neq 1$ on a:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{1}{x^r}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \left[\frac{1}{1-r}\,\frac{1}{x^{r-1}}\right]_1^R =$$



$$= \lim_{R\to+\infty}\left(\frac{1}{1-r}\,\frac{1}{R^{r-1}} - \frac{1}{1-r}\right) = \begin{cases} +\infty & \text{si } r<1 \\ \frac{1}{r-1} & \text{si } r>1 \end{cases}$$

et pour $r=1$ on trouve:

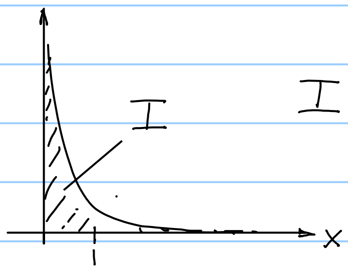
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to+\infty}\left[\ln(x)\right]_1^R =$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \ln(R) = +\infty.$$

vidéo E

2.5.5 Exemple (type 3)

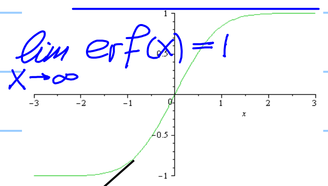
$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-x}\,dx = \lim_{\substack{R\to+\infty \\ \varepsilon\to 0+}} \int_\varepsilon^R \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-x}\,dx =: I$$



$$I = \lim_{\substack{R\to+\infty \\ \varepsilon\to 0+}} \int_{\sqrt{\varepsilon}}^{\sqrt{R}} \underbrace{\frac{1}{u}\, e^{-u^2} \overbrace{(2u)}^{\varphi'(u)}}_{\text{continue en } u=0}\,du = \quad !$$

changement de variables

$x = \varphi(u) = u^2$, $\varphi(\sqrt{\varepsilon}) = \varepsilon$, $\varphi(\sqrt{R}) = R$



$$= \lim_{R\to+\infty} 2\int_0^R e^{-u^2}\,du = \lim_{R\to+\infty}\left[\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(x)\right]_0^R =$$

$$\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,du$$

la définition de la fonction erf

$$= \lim_{R\to\infty}\left(\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}(R) - \sqrt{\pi}\cdot\mathrm{erf}(0)\right) = \sqrt{\pi}$$

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers la vidéo C	
Lien vers la vidéo D	
Lien vers la vidéo E	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

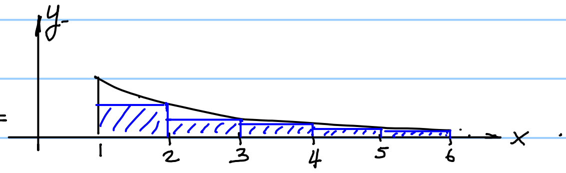
Chapitre 12

Intégration (chapitres choisis)

12.6. Convergence de séries numériques

1)

$$\underline{r>1:}\quad \underbrace{\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^r}\,dx}_{=\frac{1}{r-1}} = \lim_{n\to\infty}\int_1^{n+1}\frac{1}{x^r}\,dx =$$



$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x^r}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_k^{k+1}\frac{1}{x^r}\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^r}\cdot 1 = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^r} \overset{-1+1=0}{=} \underline{-1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^r}}$$

$$\sqcup \geqslant \sqcup \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^r} \leqslant 1+\frac{1}{r-1} = \frac{r}{r-1}\,,\quad r>1}$$

2)

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\cdot \ln(k)} \geqslant \lim_{n\to\infty}\int_2^{n}\frac{1}{x\ln(x)}\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\Big[\ln(\ln(x))\Big]_{x=2}^{x=n} = \infty.$$

<u>donc cette série diverge.</u>

3) par contre on a pour $p>1$ que

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\,\ln(k)^p} < \infty \qquad (\text{le montrer !})$$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 12

Intégration (chapitres choisis)

12.7. Intégration des fonctions rationnelles

1) Décomposition de $q(x)$ en facteurs réels irréductibles

Exemples:

$$x^2-1 = (x-1)(x+1)$$
$$x^2+1$$
$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$$
$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$
$$x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$
$$x^4+1 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

voir le chapitre des nombres complexes

2) Décomposition de $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ en éléments simples

Exemple: $$f(x) = \frac{2x^3}{x^4-1} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma x+\delta}{x^2+1}.$$

$$\Rightarrow \quad 2x^3 = \alpha(x+1)(x^2+1) + \beta(x-1)(x^2+1) + (\gamma x+\delta)(x^2-1)$$

$$\left.\begin{array}{lll} x^3: & 2 = \alpha + \beta + \gamma \\ x^2: & 0 = \alpha - \beta + \delta \\ x: & 0 = \alpha + \beta - \gamma \\ 1: & 0 = \alpha - \beta - \delta \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{algèbre linéaire} \\ \alpha = \beta = \frac{1}{2},\ \gamma = 1,\ \delta = 0 \end{array}$$

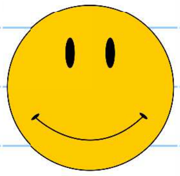
3) Intégration des éléments simples

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2\cdot x}{x^2+1}\,dx$$

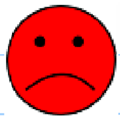
$$= \frac{1}{2}\ln(|x-1|) + \frac{1}{2}\ln(|x+1|) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\left|(x-1)(x+1)(x^2+1)\right|\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(|x^4-1|) + C$$



<u>En fait</u>



$$f(x) = \frac{1}{2}\,\frac{g'(x)}{g(x)} \quad \text{avec } g(x) = x^4-1$$

$$\text{donc } \int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln(|g(x)|) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(|x^4-1|) + C$$

Lien vers la vidéo correspondante	
Lien vers le moteur de recherche du cours	

Chapitre 12

Intégration (chapitres choisis)

12.8. Le cas général

vidéo A

12.8.1. Préparation

Soit $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ avec p, q des polynômes
avec degré $p <$ degré q

Remarque: si degré $p \geq$ degré q on commence par la division de p par q avec reste:

Exemple:

$$\frac{x^3+1}{x^2+1} = x + \frac{-x+1}{x^2+1}$$

Soit donc degré $p <$ degré q.

1) factorisation de $q(x)$ (en facteurs irréductibles)

$$q(x) = (\quad)\cdot(\quad)\cdot(\quad)(\quad)$$

vidéo B

12.8.2. Décomposition

2) décomposition en éléments simples

$$f(x) = \frac{p(x)}{(\quad)(\quad)(\quad)} = \underline{\qquad} + \underline{\qquad} + \dots + \underline{\qquad}$$

facteur dans q. — éléments simples correspondants

i) $(x-a)$ — $\dfrac{\alpha}{x-a}$

$(x-a)^2$ — $\dfrac{\alpha_1}{x-a} + \dfrac{\alpha_2}{(x-a)^2}$

ii) $(x-a)^m$, $m=2,3,\dots$ — $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{(x-a)^k}$

iii) x^2+bx+c ← zéros complexes conjugés — $\dfrac{\gamma x+\delta}{x^2+bx+c}$

iv) $(x^2+bx+c)^m$, $m=2,3,\dots$ — $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\gamma_k x+\delta_k}{(x^2+bx+c)^k}$

puis il faut remettre sur le même dénominateur, comparer les puissances, et utiliser l'algèbre linéaire pour déterminer les coéfficients α_k γ_k δ_k

vidéo C

12.8.3 Intégration

3) Intégration des éléments simples

i) $$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln(|x-a|) + C$$

ii) $$\int \frac{1}{(x-a)^k}\,dx = -\frac{1}{k-1}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C \quad , k \geq 2.$$

iii) $$\int \frac{\gamma x+\delta}{x^2+bx+c}\,dx = \int \frac{\frac{\gamma}{2}(2x+b)+\delta-\frac{1}{2}\gamma b}{x^2+bx+c}\,dx$$

$$= \frac{\gamma}{2}\ln(|x^2+bx+c|) + \left(\delta-\tfrac{1}{2}\gamma b\right)\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx$$

$$x^2+bx+c = (x+\tfrac{1}{2}b)^2 + \underbrace{c-\frac{b^2}{4}}_{=-\Delta>0\,!}$$

sinon on peut factoriser x^2+bx+c.

on pose $x=\varphi(u) = -\frac{1}{2}b + \sqrt{c-\frac{b^2}{4}}\,u$.

$$\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx = \boxed{\frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}}\ \underbrace{\int \frac{1}{u^2+1}\,du}_{\text{en } u=\varphi^{-1}(x)}$$

$$\varphi'(u) \to \frac{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}{c-\frac{b^2}{4}}$$

$$= \frac{\gamma}{2}\ln(|x^2+bx+c|) + \frac{\delta-\frac{1}{2}\gamma b}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}b}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\right)+C$$

Finalement pour $k\geq 2$

iv) $\displaystyle\int \frac{\gamma x+\delta}{(x^2+bx+c)^k}\,dx = \ldots$ même procédure que pour $k=1$ ..

$$= \frac{\gamma}{2}\,\frac{-1}{k-1}\,\frac{1}{(x^2+bx+c)^{k-1}} + \frac{\delta-\frac{1}{2}\gamma b}{(c-\frac{b^2}{4})^{k-\frac{1}{2}}}\,I_k\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\right)+C$$

où (voir 11.7.6)

$$I_k(u) = \int \frac{1}{(u^2+1)^k}\,du$$

$$= \frac{1}{2k-1}\,\frac{u}{(u^2+1)^{k+1}} + \frac{2k-3}{2k-2}\,I_{k-1}(u)$$

et $I_1(u) = \arctan(u)$

Lien vers la vidéo A	
Lien vers la vidéo B	
Lien vers la vidéo C	
Lien vers le moteur de recherche du cours	