Anneaux et corps (MATH-215) — Examen final

20 juin 2022, 15 h 15 – 18 h 15

Nom : Grothendieck Alexander

SCIPER : 42

Signature : ______________________

Numéro

1

Ce dossier d'examen contient 5 exercices, sur 28 pages, pour un total de 100 points. Veuillez utiliser l'espace quadrillé pour vos réponses. N'écrivez **PAS** dans la marge intérieure du livret.

Veuillez rédiger vos solutions sous l'exercice correspondant : sous chaque exercice, il y a l'espace quadrillé prévu à cet effet. Si vous avez besoin de davantage d'espace pour vos solutions, utilisez l'espace restant après la solution d'un autre exercice. Dans ce cas, notez soigneusement où votre solution continue. Si même cela ne suffit pas, demandez aux surveillant(e)s des feuilles additionnelles. Dans ce cas, écrivez vos noms et prénoms ainsi que le numéro de l'exercice que vous résolvez sur le papier additionnel. A la fin de l'examen, sous la surveillance d'un(e) surveillant(e), mettez-les dans le dossier d'examen, indiquez le nombre de pages additionnelles sur la feuille de présence, et signez-là. Vous n'êtes pas autorisés à utiliser vos propres feuilles de brouillon, nous les fournissons. Veuillez ne pas écrire vos solutions au crayon.

Il est interdit de commencer à lire l'examen avant que le signal ne soit explicitement donné. La durée totale de l'épreuve est 180 minutes. Durant les 20 dernières minutes, veuillez rester à votre place, même si vous avez fini. Les copies seront collectées par les surveillant(e)s à la fin de l'examen, et il vous sera alors demandé de rester assis.

La seule feuille de papier autorisée, autre que celles de ce dossier d'examen et les brouillons, est un aide-mémoire manuscrit d'une page A4 (possiblement recto-verso). Tous les documents devront être rendus à la fin de l'examen, y compris les brouillons et l'aide-mémoire. Les livres, notes de cours, et aide-mémoire de plus d'une page ne sont **PAS** autorisés. Aucun matériel électronique n'est autorisé. Veuillez présenter votre CAMIPRO sur le bord de votre table. Aucun sac ou manteau ne doit se trouver à votre place assise.

Vous pouvez résoudre chaque point de chaque exercice séparément. Si vous résolvez un point correctement en admettant les résultats des points précédents, vous recevrez le score maximal. Prenez soin de démontrer tous vos calculs, de justifier et d'expliquer toutes les étapes de votre raisonnement. Nous ne donnons le maximum de points que si la preuve est correcte et présente tous les détails importants.

Vous êtes autorisés à utiliser tous les résultats vus en cours ou en exercices, sauf si la question demande exactement un tel résultat ou un cas particulier évident d'un tel résultat. Lorsque vous utilisez un résultat du cours ou des exercices, vous devez soit le citer par son nom, soit citer la proposition précisément en disant : on a vu dans le cours que "[ici l'énoncé précis du résultat]".

Question:	1	2	3	4	5	Total
Points:	30	18	10	24	18	100
Score:						

Exercice 1 [**30 pts**]

(1) Énoncez et démontrez le critère d'Eisenstein sur l'irréductibilité d'un polynôme $f \in A[x]$, où A est un anneau factoriel.

(2) Démontrez que pour chaque entier (positif) premier p, le polynôme $x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ est irréductible.

(3) Démontrez que $\left[\mathbb{Q}\left(e^{\frac{2\pi i}{p}}\right) : \mathbb{Q}\right] = p - 1$.

(4) Démontrez que $\operatorname{Gal}\left(\mathbb{Q}\left(e^{\frac{2\pi i}{p}}\right)/\mathbb{Q}\right) \cong \mathbb{F}_p^\times$.

Exercice 2 [**18 pts**]

Soit $K \subseteq L$ une extension de corps.

(1) Définissez quand $K \subseteq L$ est une extension galoisienne. (Vous pouvez utiliser sans la définir la notion de groupe de Galois.)

Supposons pour le reste de l'exercice que $K = L^G$ pour un groupe fini $G \subseteq \mathrm{Aut}(L)$.

(2) Donnez et démontrez l'expression du polynôme minimal sur K d'un élément $\alpha \in L$, en terme de l'orbite de α par l'action de G.

(3) Démontrez que $[L : K] < \infty$.

Exercice 3 [**10 pts**]

Notons $\mathcal{C} := C^0([0,1];\mathbb{R})$ l'anneau des fonctions réelles continues sur l'intervalle $[0,1]$ (muni des opérations d'addition et de multiplication de fonctions). Pour chaque $x \in [0,1]$ définissons

$$I_x := \{ \, f \in \mathcal{C} \mid f(x) = 0 \, \}.$$

Vous pouvez utiliser sans preuve que I_x est un idéal maximal de $\mathcal{C}$.

(1) Soit $I \subset \mathcal{C}$ un idéal tel que I n'est contenu dans aucun des I_x. Montrez que $I = \mathcal{C}$.
Vous pouvez utiliser que $[0,1]$ *est compact, c'est-à-dire que chaque recouvrement ouvert de* $[0,1]$ *contient un recouvrement fini.*

(2) Montrez que tout idéal maximal de $\mathcal{C}$ est égal à I_x pour un certain $x \in [0,1]$.

Exercice 4 [**24 pts**]

Considérons $K = \mathbb{Q}$ et $L = \mathbb{Q}\big[i, \sqrt{2}\big]$. Un élément $\alpha \in L$ s'écrit de manière unique

$$\alpha = a + bi + c\sqrt{2} + di\sqrt{2}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ (vous pouvez utiliser cette affirmation sans preuve). Fixons un élément $\alpha \in L$.

(1) Démontrez que $\deg m_{\alpha,K} \in \{1, 2, 4\}$.

(2) Démontrez que pour $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ on a $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(3) Donnez des conditions nécessaires et suffisantes sur les coefficients a, b, c et d pour que $\deg m_{\alpha,K} = 1$, respectivement $\deg m_{\alpha,K} = 2$, respectivement $\deg m_{\alpha,K} = 4$. Démontrez votre réponse (comme toujours).

Exercice 5 [**18 pts**]

Considérons deux anneaux A et B (possiblement non-commutatifs), un idéal bilatère $I \subseteq A \times B$ et définissons

$$I_A = \{ x \in A \mid (x, 0) \in I \}, \qquad \text{et} \qquad I_B = \{ y \in B \mid (0, y) \in I \}.$$

(1) Démontrez que I_A et I_B sont des idéaux bilatères dans A et B, respectivement.

(2) Démontrez que $I = I_A \times I_B$.

(3) Soit p un nombre entier (positif) premier. Listez tous les idéaux bilatères de $M_2(\mathbb{F}_p) \times \mathbb{F}_p$, où $M_2(\mathbb{F}_p)$ est l'anneau des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{F}_p$.