# Cours Euler: Corrigé 26

18 mars 2026

**Exercice 1**

**Classification des isométries du plan, rappel.** Considérons trois points non alignés $A, B, C$ et leurs images $A', B', C'$ par une isométrie $f$.

1) Etape 1 : définition de $S_a, B_1, C_1$ et image de $A$ fixée.

   Lorsque $A = A'$, nous décidons de choisir $a = AB$, la seule droite passant par $A$ et $B$. Ainsi $S_a(A) = A = A'$, et on définit $B_1 = S_a(B) = B$, $C_1 = S_a(C)$.

   Lorsque $A \neq A'$, nous choisissons la médiatrice du segment $[AA']$. La symétrie axiale d'axe $a$ envoie $A$ sur $A'$ (et vice-versa). Donc $S_a(A) = A'$, et on définit $B_1 S_a(B)$, $C_1 = S_a(C)$.

2) Etape 2 : définition de $S_b, C_2$ et image de $A$ et $B$ fixée.

   Lorsque $B_1 = B'$ nous choisissons la droite $b = A'B'$. De cette façon $A'$ et $B_1 = B'$ sont fixés par la symétrie axiale $S_b$. Donc $(S_b \circ S_a)(A) = S_b(A') = A'$, $(S_b \circ S_a)(B) = S_b(B_1) = S_b(B') = B'$. On définit $C_2 = S_b(C_1) = (S_b \circ S_a)(C)$.

   Lorsque $B'$ et $B_1$ sont deux points distincts, nous choisissons pour $b$ la médiatrice du segment $[B_1B']$. De cette façon $S_b(B_1) = B'$. D'autre part le point $A'$ est fixé par $S_b$ car il appartient à $b$. Pour prouver cela nous utilisons la caractérisation de la médiatrice $b$ comme lieu géométrique des points équidistants de $B_1$ et $B'$. Puisque $S_a(A) = A'$ et $S_a(B) = B_1$, nous déduisons du fait que la symétrie axiale $S_a$ et $f$ sont des isométries que

   $$\overline{B_1A'} = \overline{S_a(B)S_a(A)} = \overline{BA} = \overline{f(B)f(A)} = \overline{B'A'}$$

   Le point $A'$ appartient donc à $b$.

   Donc $(S_b \circ S_a)(A) = S_b(A') = A'$, $(S_b \circ S_a)(B) = S_b(B_1) = B'$. On définit $C_2 = S_b(C_1) = (S_b \circ S_a)(C)$.

3) Etape 3 : on définit, si besoin, $S_c$. Les trois points sont fixés.

   Lorsque $C_2 = S_b(C_1)$ et $C'$ sont égaux, le processus est terminé. En effet, l'isométrie $(S_b \circ S_a$ transforme le triangle $ABC$ en le triangle $A'B'C'$. Vu qu'une isométrie est entièrement déterminée par son effet sur un triangle, $f = S_b \circ S_a$. Notons que dans ce cas il n'existe pas de symétrie axiale $S_c$ telle que $f = S_c \circ S_b \circ S_a$ car la symétrie $S_c$ devrait fixer le triangle $A'B'C'$, ce qui n'est pas possible.

   Sinon, on choisit pour $c$ – comme toujours – la médiatrice de $[C_2C']$. Le point $B'$ appartient à cette médiatrice car

   $$\overline{B'C'} = \overline{BC} = \overline{B_1C_1} = \overline{B'C_2}$$

(première égalité par application de $f$, deuxième par $S_a$, troisième par $S_b$). De plus, le point $A'$ appartient à cette médiatrice car

$$\overline{A'C'} = \overline{AC} = \overline{A'C_1} = \overline{A'C_2}$$

(première égalité par application de $f$, deuxième par $S_a$, troisième par $S_b$). Autrement dit, $m_{[C_2C']} = A'B'$. Il n'y aura pas besoin de la construire !

Finalement, on a obtenu $S_c \circ (S_b \circ S_a)(A) = S_c(A') = A'$, $S_c \circ (S_b \circ S_a)(B) = S_c(B') = B'$, $S_c \circ (S_b \circ S_a)(C) = S_c(C_2) = C'$.

4) On conclut des calculs ci-dessus que $f$ et $S_c \circ S_b \circ S_a$ ont le même effet sur le triangle $ABC$. Donc $f = S_c \circ S_b \circ S_a$.

   L'isométrie $f$ est une composée de trois symétries axiales. Ceci clôt le cas où $c$ existe. Sinon $f = S_b \circ S_a$ est une composition de deux symétries axiales.

   On remarque que le cas où $f$ est l'identité (composée de zéro symétries axiales) est donné par $f = S_a \circ S_a$. C'est aussi la composition de deux symétries. Le cas où $f$ est une symétrie $S_a$ est donné par $f = S_a \circ S_a \circ S_a$.

**Exercice 2**

1) Soient $R$ et $R'$ deux rotations de centre $O$ et d'angle orientés respectivement $\alpha$ et $\beta$. Alors la composé $R' \circ R$ est une rotation de centre $O$. Soit $A$ un point du plan distinct de $O$. Si on note $R(A) = A'$ et $R' \circ R(A) = R'(A') = A''$ alors l'angle de la rotation $R' \circ R$ est donné par l'angle $\widehat{AOA''} = \widehat{AOA'} + \widehat{A'OA''} = \alpha + \beta$. Rappelons que la somme d'angles orientés prend en compte l'orientation de l'angle, soit son signe.

   On peut également le voir au moyen des axes de symétrie qui composent les rotations, sachant que l'angle orienté d'une rotation vaut deux fois l'angle orienté déterminé par ses deux axes (où l'orientation est donnée par l'ordre dans lequel on fait les réflexions). On avait vu dans une série précédente que pour obtenir les axes de la rotation composée, on peut faire coïncider le deuxième axe de $R$ avec le premier de $R'$, qui s'annulent alors. L'angle orienté entre les deux axes restant est la somme des angles orientés entre les axes de $R$ et de $R'$. Une preuve complète de ce fait est cependant ardue et nous la passons ici. Notons qu'on doit prendre des sommes « à 360 degrés près ». Par exemple, la somme de rotations d'angles 120° et 300° est une rotation d'angle 60° (et non pas 420°).

2) Soit $O$ le centre de rotation de $R$ et $O'$ le centre de rotation de $R'$. Notons $\alpha$ l'angle de la rotation $R$ et $\beta$ l'angle de la rotation $R'$. Différencions deux cas :

   - $\alpha = -\beta$. Dans ce cas, $R' \circ R$ est une translation.

     En effet, puisque $R$ est une rotation, alors $R$ est la composée de deux réflexions se coupant en $O$ (c'est un théorème vu au cours). Soit $d$ la droite passant par $O$ et $O'$, et $S_d$ la symétrie d'axe $d$. Alors il y a une et unique droite $a$ telle que $R = S_d \circ S_a$. A partir de la droite $d$ donnée, on a donc construit un des axes de symétrie composant $R$. Faisons de même pour $R'$ : Il y a une unique droite $b$ tel que la réflexion $S_b$ dont l'axe est cette droite vérifie $R' = S_b \circ S_d$. Puisque $\alpha = -\beta$, alors l'axe de $S_b$ est parallèle à l'axe de $S_a$.

Ainsi :

$$R' \circ R = S_b \circ S_d \circ S_d \circ S_a = S_b \circ S_a$$

Comme les axes de $S_a$ et $S_b$ sont parralèles, alors $R' \circ R$ est une translation.

- $\alpha \neq -\beta$. Dans ce cas, $R' \circ R$ est une rotation.

  Reprenons comme avant la droite $d$, et les axes de $S_a$ et $S_b$. Comme $\alpha \neq -\beta$, alors, ces deux derniers axes se coupent en un point $C$. Or comme précédemment,

  $$R' \circ R = S_b \circ S_d \circ S_d \circ S_a = S_b \circ S_a$$

  Donc $R' \circ R$ est une rotation de centre $C$, vu que c'est la composée de deux symétries axiales dont les axes se coupent en $C$.

## Exercice 3

**149.** Le centre d'une rotation se trouve à équidistance d'un point distinct du centre et de son image, donc sur la médiatrice de ces deux points. Ainsi, pour trouver le centre, on trace la médiatrice $d$ du segment $[MM']$, et la médiatrice $d'$ du segment $[NN']$. Le centre $O$ est alors le point d'intersection de ces deux médiatrices. L'angle de rotation est l'angle $\widehat{MOM'}$.
Remarque : si on ne précise pas que l'isométrie est une rotation, il y en aurait une deuxième possible, celle qu'on obtient à partir de la rotation en précomposant par la symétrie d'axe $MN$ ou en post-composant avec la symétrie d'axe $M'N'$.

## Exercice 4

Corrigé

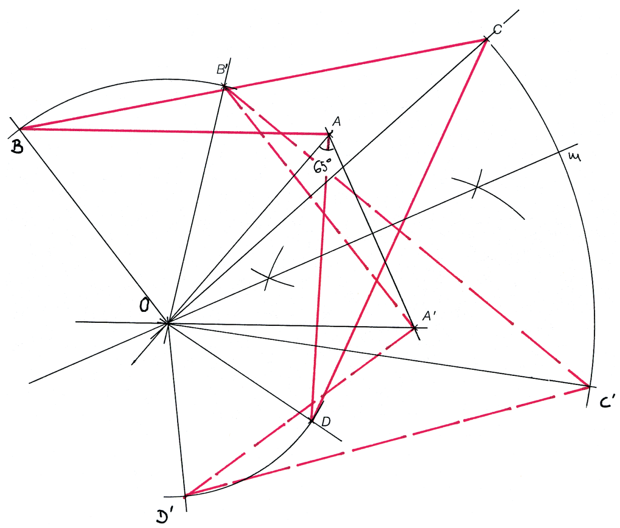
159.

Le centre de rotation $O$ se trouve sur la médiatrice de chaque segment déterminé par un point et son image. Il se situe donc sur la médiatrice $m$ du segment $AA'$.

L'angle $\widehat{AOA'} = 50°$.

Comme $OA = OA'$, puisque $O$ appartient à la médiatrice de $AA'$, le triangle $AOA'$ est isocèle. Par conséquent les angles $\widehat{AOA'}$ et $\widehat{A'OA}$ sont isométriques et mesurent :
$\widehat{AOA'} = \widehat{A'OA} = \frac{180 - 50}{2} = 65°$.

Il s'agit alors de construire un angle de côté $A'A$, de sommet $A$ qui mesure $65°$, puis de chercher l'intersection de son second côté avec la médiatrice $m$, pour déterminer l'emplacement du centre de rotation $O$.
Les figures $ABCD$ et $A'B'C'D'$ peuvent alors être complétées, en s'appuyant sur les propriétés des rotations.



**Exercice 5**

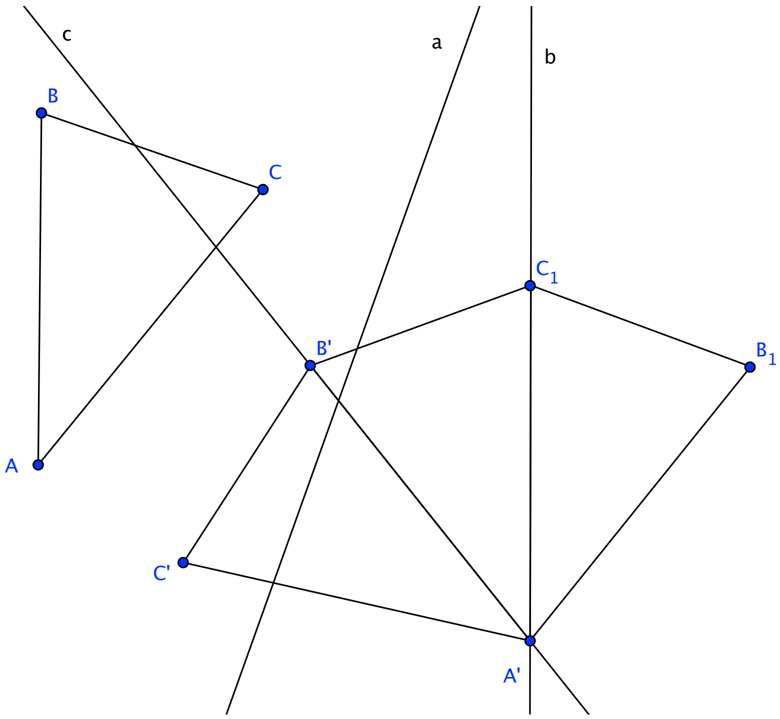
On peut voir que le triangle $A''B''C''$ est obtenu de $ABC$ par une translation (composition de deux symétries axiales d'axes parallèles).
Considérons la droite $AA''$. Il suffit de trouver deux symétries axiales dont les axes sont perpendiculaires à cette droite et qui envoie $A$ sur $A''$. On peut choisir le premier axe $d$ arbitrairement, sous la contrainte qu'il doit être perpendiculaire à la droite $AA''$. L'image de $A$ par cette symétrie est $A'$. Maintenant, le second axe $d'$ doit être la médiatrice du segment $A'A''$.

**Exercice 6**

Les deux triangles sont isométriques, donc il existe une isométrie envoyant l'un sur l'autre. Cette isométrie est la composée d'un nombre pair de réflexions vu que les deux triangles ont la même orientation. Comme ce n'est pas une une translation, c'est une rotation. On peut le vérifier par construction en trouvant le centre et vérifiant que tous les points sont obtenus par une même rotation ayant ce centre.
En fait, Claude-Eric a obtenu le triangle $A'B'C'$ par la composition d'une translation et d'une rotation non nulle, et cette transformation est une rotation non nulle (c'est un théorème).

**Exercice 7**

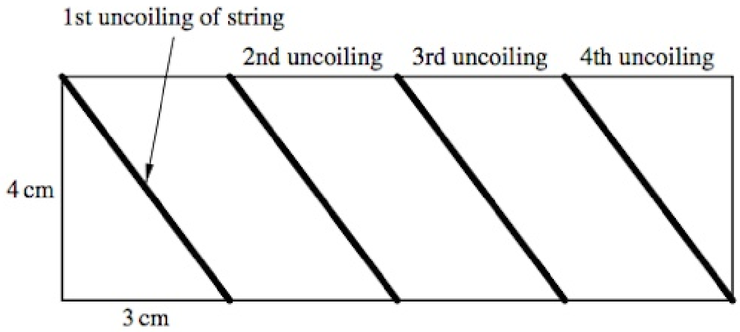
**Composition de symétries.**




L'isométrie qui transforme le triangle $ABC$ en $A'B'C'$ n'est pas une rotation puisqu'il s'agit d'une composition de trois symétries axiales. Une rotation quant à elle est soit l'identité, soit la composition de deux symétries axiales (dont les axes se coupent).
On aurait pu détecter directement que l'isométrie en question n'est pas une rotation en observant qu'elle ne préserve pas l'orientation.

**Exercice 8 (Optionnel)**

La manière la plus simple de résoudre le problème est de couper le cylindre horizontalement pour le mettre à plat. On obtient alors un rectangle de 12 cm de long et de 4 cm de large (la circonférence du cylindre mesure 4cm). La ficelle parcourt ce rectangle comme sur l'illustration suivante :




Il suffit donc d'appliquer le Théorème de Pythagore. Chacun des quatre segments de ficelle mesure exactement

$$\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

La ficelle mesure donc $4 \cdot 5 = 20$ cm.