Cours Euler: Série 25

20 mars 2024

Exercice 1

Lesquelles des affirmations suivantes sont vraies pour toutes affirmations R et S ? Lorsqu'une affirmation est vraie, donnes-en une démonstration (déduction ou table). Sinon donne un contre-exemple (c'est-à-dire un exemple qui montre que l'affirmation est fausse).
Indication. Essaie d'abord avec un exemple pour voir si l'affirmation a une chance d'être vraie. Choisis des affirmations R et S qui ne sont pas équivalentes pour ce test !

1) $(R \Rightarrow S) \Rightarrow (\neg R \Rightarrow \neg S)$.
2) Si R est vraie et $R \Rightarrow S$ est vraie, alors S est vraie.
3) Si R est fausse et $R \Rightarrow S$ est vraie, alors S est fausse.
4) Si R est vraie et si $R \Rightarrow S$ est fausse, alors S est vraie.
5) Si $R \Rightarrow S$ est vraie, alors S est vraie.
6) $R \Rightarrow (R \cup S)$
7) $(R \cup S) \Rightarrow R$.
8) $(R \cap S) \Rightarrow R$.
9) $(R \Rightarrow S) \Leftrightarrow (S \Rightarrow R)$
10) $((R \Rightarrow S) \cap (S \Rightarrow T)) \Rightarrow (R \Rightarrow T)$

Exercice 2

Tables de vérité.

1) Démontre que la négation de « A et B » est l'affirmation « non A ou non B » en remplissant la table de vérité suivante. La première colonne montre si A est vraie ou fausse et la deuxième le fait pour B, en alternant les valeurs V et F de sorte que les quatre possibilités apparaissent : VV, VF, FV et FF. Il s'agit de remplir l'avant-dernière colonne à l'aide de la précédente et la dernière à l'aide des colonnes 3 et 4.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \cap B$	$\neg(A \cap B)$	$\neg A \cup \neg B$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

2) Démontre que l'affirmation D = « A et (B ou C) » est équivalente à l'affirmation E = « (A et B) ou (A et C) » en remplissant la table de vérité suivante :

A	B	C	$B \cup C$	D	$A \cap B$	$A \cap C$	E
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

Exercice 3

Ecris la négation des affirmations suivantes (avec le langage mathématique : pour tout, il existe, etc.).

1) Il y a des légumes que je n'aime pas.
2) Tous les chats sont noirs.
3) Il existe des perroquets qui ne parlent pas.
4) Aucun perroquet ne parle.
5) Les perroquets parlent parfois.
6) Pour chaque magasin, il existe un jour de la semaine où il est fermé.
7) Il existe un jour de la semaine tel que tous les magasins sont fermés.

Exercice 4

Pour tout - Il existe. Soit A une phrase faisant intervenir des nombres naturels m et n indéterminés. Supposons que A est une affirmation si on fixe les nombres m et n (par exemple la phrase « $m = 3 \cdot n$ » est une affirmation (fausse) si $m = 2$ et $n = 4$). On considère les affirmations $B =$ « Pour tout m, il existe n tel que A est vraie » et $C =$ « Il existe n tel que A est vraie pour tout m ».

1) Montre que l'implication $B \Rightarrow C$ est fausse en général.
   Indication. Prendre pour A la phrase « $n = m + 1$ »
2) Essaie d'expliquer pourquoi l'implication inverse $C \Rightarrow B$ est par contre vraie.

Exercice 5

Récurrence I. On cherche à calculer la somme des puissances de 2, c'est-à-dire

$$p(n) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n.$$

1) Calcule $p(0) = 2^0$, puis $p(1)$, $p(2)$ et $p(3)$.
2) Sans lire la partie suivante émets une hypothèse sur la valeur de $p(n)$ en général.
3) Démontre par récurrence que $p(n) = 2^{n+1} - 1$. Il s'agit donc de vérifier que cette formule est correcte pour $n = 0$ (vérifie aussi qu'elle est vraie pour $n \leq 3$, les valeurs calculées ci-dessus) puis il faut démontrer que si $p(n) = 2^{n+1} - 1$, alors $p(n+1) = 2^{n+2} - 1$.

Exercice 6 (Optionnel)

Récurrence II. On construit une pyramide avec des blocs de pierre cubiques d'un mètre de côté en commençant avec une base carrée de n mètres de côté. On construit ensuite le deuxième étage de sorte à obtenir des marches d'un demi-mètre de profondeur : le deuxième étage mesure donc $(n-1)$ mètres sur $(n-1)$. On continue ainsi de suite jusqu'au sommet constitué d'un unique bloc de pierre. On appelle $f(n)$ le nombre de cubes qu'il faut pour construire la pyramide.

1) Calcule $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$.

2) Montre que les valeurs calculées ci-dessus coïncident avec $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour $1 \leq n \leq 3$.

3) Démontre par récurrence que $f(n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 7

Récurrence III. Démontre par récurrence que le nombre $3^{2n} - 2^{n-3}$ est un multiple de 7 pour tout entier naturel $n \geq 3$. Tu initialises ici la récurrence en vérifiant que l'affirmation est vraie pour $n = 3$. Il faut ensuite montrer que si l'affirmation est vraie pour n, alors elle l'est aussi pour $n+1$. Ceci revient à montrer que

$$3^{2(n+1)} - 2^{(n+1)-3}$$

est un multiple de 7. Une astuce utile ici sera de mettre en évidence 3^2 dans la puissance de 3 et de l'écrire $3^2 = 9 = 7 + 2$, pour pouvoir isoler un multiple de 7.

Les problèmes 9 à 11 sont des problèmes de révision. Gardez-les pour vérifier si vous êtes prêts !

Exercice 8

Vrai ou faux ? Justifie tes réponses !

1) La relation réciproque de $\leq : \mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{N}$ est la relation $> : \mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{N}$.

2) Soit $\{(n, m) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} | n \leq m\}$ la représentation ensembliste d'une relation $R : \mathbb{N} \rightsquigarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Alors l'ensemble de définition de R est vide.

3) Pour n'importe quels ensembles X et Y, il existe une fonction de X vers Y.

4) Il y a 6 fonctions injectives de $\{\diamondsuit, \heartsuit\}$ vers $\{0, 1, 2\}$.

5) Le degré de l'équation $x^4 - 3x + 2 = (x^2 - 2)(x^2 + 2)$ est 1.

Exercice 9

Deux fonctions. On considère la fonction réelle $f(x) = 2x - 1$ et la fonction $g(x) = \sqrt{x}$. Pour chacune de ces fonctions,

1) Détermine son ensemble de définition.

2) Montre qu'elle est bijective.

3) Détermine sa fonction inverse.

4) Dessine son graphe ainsi que celui de son inverse. Rappelle quel est le lien entre le graphe d'une fonction et celui de son inverse.

Exercice 10

Equations. Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre. On considère l'équation affine $mx - x + m + 1 = 0$. Détermine en fonction des valeurs de m les solutions de cette équation.

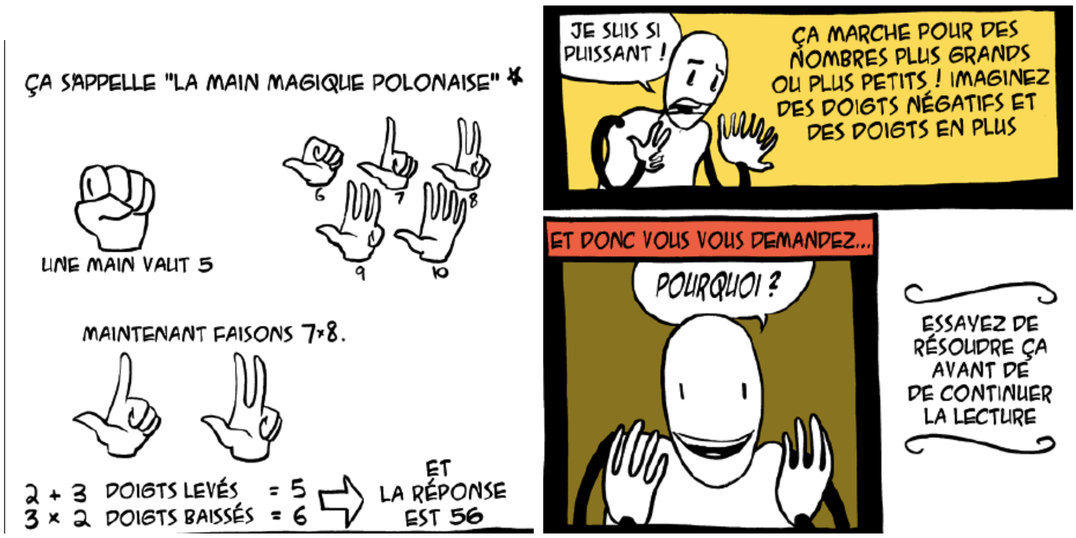
Exercice 11

Un problème. Le magicien Moebius pense à un nombre. Il lui ajoute 20 et multiplie le résultat par 2. Curieusement il trouve 10 fois le nombre de départ. Quel est ce nombre ?

Et pour terminer. Deux exercices optionnels différents pour y réfléchir dès maintenant ou pendant les vacances de Pâques !

Exercice 12 (Optionnel)

La main magique polonaise.
Tiré du webcomic « les céréales du dimanche matin », `http://cereales.lapin.org/index.php?number=176`



Exercice 13 (Optionnel)

On cherche le plus petit nombre entier naturel n qui a la propriété suivante :

« Dans tout groupe de n personnes il existe toujours soit un sous-groupe de 3 personnes qui se connaissent toutes entre elles, soit un sous-groupe de 3 personnes qui ne se connaissent pas. »