

# Cours Euler: Corrigé 25

11 mars 2026

## Exercice 1

Pour chacune des affirmations de l'exercice, nous allons déterminer lesquelles sont vraies. Pour cet exercice, nous supposons que Edgard est un élève qui a 10 ans.

- 1) **Faux.** En effet, considérons les affirmations  $R = \text{« Edgard a 9 ans »}$  et  $S = \text{« Edgard va à l'école »}$ . Alors l'affirmation  $R \Rightarrow S$  est vraie. Par contre, l'affirmation  $(\text{non } R) \Rightarrow (\text{non } S)$  est « Marc n'a pas 9 ans, donc Marc ne va pas à l'école » qui est fausse.
- 2) **Vrai.** Il suffit de regarder la table de  $(R \Rightarrow S)$  trouvée dans l'exercice 1 en remplaçant  $A$  par  $R$  et  $B$  par  $S$ .
- 3) **Faux.** Reprenons le contre-exemple utilisé dans 1, c'est-à-dire  $R = \text{« Edgard a 9 ans »}$  et  $S = \text{« Edgard va à l'école »}$ . Dans ce cas  $R \Rightarrow S$  est vraie et  $R$  est fausse, comme on a fixé au début de l'exercice que Edgard est un élève de 10 ans. Mais  $S$  est vraie.
- 4) **Faux.** Posons  $R = \text{« Edgard va à l'école »}$  et  $S = \text{« Edgard a 9 ans »}$ . Alors  $R$  est vraie, l'implication  $R \Rightarrow S$  est fausse. Mais  $S$  est fausse.
- 5) **Faux.** Soit  $R$  l'affirmation « Edgard a 9 ans » et  $S$  l'affirmation « Edgard ne va pas à l'école ». Alors, comme  $R$  est fausse, l'implication  $R \Rightarrow S$  est vraie. Mais  $S$  est fausse.
- 6) **Vrai.** En effet,  $(R \text{ ou } S)$  est vraie si et seulement si, soit  $R$  est vraie, soit  $S$  est vraie, soit  $R$  et  $S$  sont toutes deux vraies. Alors si  $R$  est vraie,  $(R \text{ ou } S)$  est aussi vraie.
- 7) **Faux.** Prenons  $R = \text{« J'ai un chien »}$  et  $S = \text{« J'ai un chat »}$ , et supposons que j'ai un chat mais je n'ai pas de chiens. Alors  $(R \text{ ou } S)$  est vraie, mais  $R$  ne l'est pas.
- 8) **Vrai.** En effet,  $(R \text{ et } S)$  est vraie si et seulement si  $R$  et  $S$  sont toutes deux vraies. Donc si  $(R \text{ et } S)$  est vraie, en particulier  $R$  est vraie.
- 9) **Faux.** Si  $(R \Rightarrow S) \iff (S \Rightarrow R)$  alors les tables logiques de  $(R \Rightarrow S)$  et  $(S \Rightarrow R)$  sont les mêmes. Mais elles sont

<b>R</b> \ <b>S</b>	<b>V</b>	<b>F</b>
<b>V</b>	V	F
<b>F</b>	V	V

<b>R</b> \ <b>S</b>	<b>V</b>	<b>F</b>
<b>V</b>	V	V
<b>F</b>	F	V

qui sont différentes. Comme contre-exemple, on peut utiliser le même exemple qu'en 1).

- 10) **Vrai.** Supposons que  $((R \Rightarrow S) \text{ et } (S \Rightarrow T))$  est vraie. Alors  $(R \Rightarrow S)$  est vraie et  $(S \Rightarrow T)$  est vraie. Nous devons montrer que  $R \Rightarrow T$ , c'est-à-dire, si  $R$  est vraie, alors  $T$  est vraie. Supposons donc  $R$  vraie et montrons que  $T$  est vraie. Comme  $(R \Rightarrow S)$  est vraie et  $R$  est vraie,  $S$  est vraie. Comme  $(S \Rightarrow T)$  est vraie et  $S$  est vraie,  $T$  est vraie.

Remarquons que pour 6), 8), 10) il n'y a rien à vérifier dans le cas où la prémisse est fausse.

## Exercice 2

### Tables de vérité.

- 1) Nous remplissons la table colonne après colonne. La troisième est la négation de la première et la quatrième est la négation de la deuxième. Pour la colonne de  $A \cap B$  on applique la définition de la conjonction : elle n'est vraie que si  $A$  et  $B$  sont vraies toutes les deux. La colonne suivante en est la négation.

$A$	$B$	$\neg A$	$\neg B$	$A \cap B$	$\neg(A \cap B)$	$\neg A \cup \neg B$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

La dernière colonne est remplie en appliquant la définition de disjonction. Cette affirmation  $\neg A \cup \neg B$  est vraie si  $\neg A$  ou  $\neg B$  est vraie. On inscrit donc V à chaque fois qu'il apparaît un V dans la colonne de  $\neg A$  ou  $\neg B$ .

- 2) On procède comme dans (a) et on constate que les colonnes de  $D$  et  $E$  sont les mêmes.

$A$	$B$	$C$	$B \cup C$	$D$	$A \cap B$	$A \cap C$	$E$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

## Exercice 3

- 1) J'aime tous les légumes.
- 2) Il y a un chat qui n'est pas noir.
- 3) Tous les perroquets parlent.
- 4) Il existe un perroquet qui parle.
- 5) Les perroquets ne parlent jamais.
- 6) Il existe un magasin ouvert tous les jours de la semaine.
- 7) Tous les jours de la semaine, il y a un magasin ouvert.

## Exercice 4

### Pour tout - il existe.

- 1) Choisissons comme phrase  $A$  l'égalité  $n = m + 1$ .

Alors l'affirmation « Pour tout  $m$ , il existe  $n$  tel que  $A$  » est vraie ; il suffit de poser  $n = m + 1$ . Par contre, « Il existe  $n$  tel que pour tout  $m$ ,  $A$  » est fausse puisque pour  $n$  fixé, il existe au plus un nombre naturel  $m$  tel que  $A$  soit satisfaite.

- 2) Supposons que « Il existe  $n$  tel que pour tout  $m$ ,  $A$  », et notons cette valeur de  $n$  par  $N$ . Alors « Pour tout  $m$ , il existe  $n$  tel que  $A$  » car il suffit de choisir  $n = N$ .

### Exercice 5

**Récurrence I.** On cherche à calculer la somme des puissances de 2, c'est-à-dire

$$p(n) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n.$$

On calcule  $p(0) = 2^0 = 1$ , puis  $p(1) = 3$ ,  $p(2) = 7$  et  $p(3) = 15$ . On commence à soupçonner que  $p(n) = 2^{n+1} - 1$ . Démontrons-le. La formule est correcte pour  $n \leq 3$ . Supposons donc qu'elle est vraie pour  $n$  et démontrons alors qu'elle est aussi vraie pour  $n + 1$ . Autrement dit nous devons montrer

$$p(n) = 2^{n+1} - 1 \implies p(n+1) = 2^{n+2} - 1.$$

Calculons  $p(n+1) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = p(n) + 2^{n+1}$ . La formule étant vraie pour  $p(n)$ , nous en déduisons que

$$p(n+1) = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

### Exercice 6

**Récurrence II.** On construit une pyramide avec des blocs de pierre cubiques d'un mètre de côté en commençant avec une base carrée de  $n$  mètres de côté. On construit ensuite le deuxième étage de sorte à obtenir des marches d'un demi-mètre de profondeur : le deuxième étage mesure donc  $(n-1)$  mètres sur  $(n-1)$ . On continue ainsi de suite jusqu'au sommet constitué d'un unique bloc de pierre. On appelle  $f(n)$  le nombre de cubes qu'il faut pour construire la pyramide.

On calcule  $f(1) = 1$ ,  $f(2) = 4 + 1 = 5$  et  $f(3) = 9 + 4 + 1 = 14$ . Ces valeurs calculées coïncident avec  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  pour  $1 \leq n \leq 3$ . Nous sommes donc prêts à démontrer par récurrence que  $f(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ . Nous devons montrer que

$$f(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \implies f(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

La pyramide de base carrée  $(n+1) \times (n+1)$  s'obtient à partir de celle de base  $n \times n$  en ajoutant un étage de  $(n+1)^2$  blocs de pierre. Ainsi, puisque la formule est vraie pour  $n$

$$f(n+1) = f(n) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

On met au même dénominateur :

$$f(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$$

et on continue le calcul :

$$f(n+1) = \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}.$$

Heureusement, nous savons ce que nous devons démontrer. Il n'est pas nécessaire de savoir factoriser le polynôme  $2n^2 + 7n + 6$ , il suffit de calculer

$$(n + 2)(2n + 3) = 2n^2 + 4n + 3n + 6 = 2n^2 + 7n + 6.$$

En conclusion, l'hypothèse de récurrence  $f(n) = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$  implique que le nombre de cubes  $f(n+1)$  de pierre qu'il faut pour construire une pyramide d'un étage de plus vaut  $\frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6}$ . La démonstration est terminée.

**Exercice 7**

**Récurrence III.** Lorsque  $n = 3$ , on calcule  $3^{2 \cdot 3} - 2^{3-3} = 3^6 - 1 = 729 - 1 = 728 = 7 \cdot 104$ . La récurrence est initialisée, nous pouvons démontrer le pas de récurrence.

Supposons donc que  $3^{2n} - 2^{n-3}$  est un multiple de 7. Nous devons montrer que  $3^{2(n+1)} - 2^{(n+1)-3} = 3^{2n+2} - 2^{n-2}$  est un multiple de 7. Calculons

$$3^{2n+2} - 2^{n-2} = 9 \cdot 3^{2n} - 2^{n-2} = (7 + 2)3^{2n} - 2^{n-2} = 7 \cdot 3^{2n} + 2 \cdot 3^{2n} - 2^{n-2}.$$

Ce nombre est un multiple de 7 si et seulement si  $2 \cdot 3^{2n} - 2^{n-2}$  est un multiple de 7. Or

$$2 \cdot 3^{2n} - 2^{n-2} = 2 \cdot (3^{2n} - 2^{n-3})$$

qui est un multiple de 7 par hypothèse d'induction. Ceci conclut la preuve.

**Exercice 8 (Optionnel)**

**La main magique polonaise.** Tiré du webcomic "les céréales du dimanche matin", <http://cereales.lapin.org/index.php?number=1766>

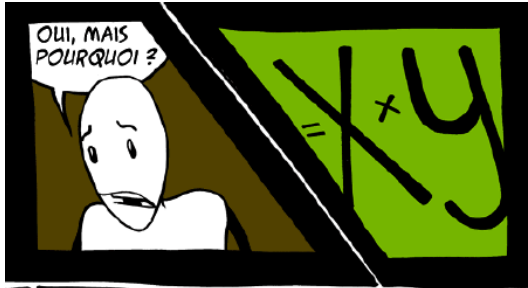

$$10 \left[ \underbrace{(x-5) + (y-5)}_{\substack{10 \text{ FOIS LA SOMME DES} \\ \text{VALEURS POSITIVES}}} \right] + 1 \left[ \underbrace{(10-x) \cdot (10-y)}_{\substack{1 \text{ FOIS LE PRODUIT DES} \\ \text{VALEURS NÉGATIVES}}} \right]$$

$$= 10x + 10y - 10x - 10y + x \cdot y$$

$$= x \cdot y$$

MAINTENANT QUE VOUS AVEZ LA PREUVE VOUS SAVEZ EXACTEMENT COMMENT ÇA MARCHE.



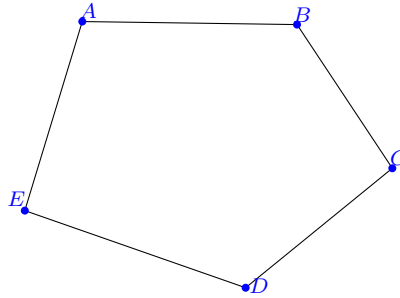



ÇA, C'EST LE PIRE CÔTÉ DE LA NATURE HUMAINE.

**Exercice 9 (Optionnel)**

On se représente ce problème par un *graphe* : les points (appelés *sommets* du graphe) représentent les

personnes et les traits (appelés *arêtes*) indiquent que les personnes reliées par ce trait se connaissent. Ainsi un groupe de trois personnes qui se connaissent toutes entre elles est représenté par un triangle. S'il y a cinq personnes le graphe suivant montre une situation où il n'y a aucun sous-groupe de trois personnes qui se connaissent (puisque le graphe ne contient aucun triangle) :



mais il n'y a pas non plus de sous-groupe de trois personnes qui ne se connaissent pas puisque chaque personne connaît exactement deux personnes. La solution au problème est donc au moins 6 et on peut résoudre le problème par sous-cas pour trouver que  $n = 6$ ...