

Cours Euler: Corrigé 25

12 mars 2025

Exercice 1

Pour chacune des affirmations de l'exercice, nous allons déterminer lesquelles sont vraies. Pour cet exercice, nous supposons que Edgard est un élève qui a 10 ans.

- 1) **Faux.** En effet, considérons les affirmations $R = \text{« Edgard a 9 ans »}$ et $S = \text{« Edgard va à l'école »}$. Alors l'affirmation $R \Rightarrow S$ est vraie. Par contre, l'affirmation $(\text{non } R) \Rightarrow (\text{non } S)$ est « Marc n'a pas 9 ans, donc Marc ne va pas à l'école » qui est fausse.
- 2) **Vrai.** Il suffit de regarder la table de $(R \Rightarrow S)$ trouvée dans l'exercice 1 en remplaçant A par R et B par S .
- 3) **Faux.** Reprenons le contre-exemple utilisé dans 1, c'est-à-dire $R = \text{« Edgard a 9 ans »}$ et $S = \text{« Edgard va à l'école »}$. Dans ce cas $R \Rightarrow S$ est vraie et R est fausse, comme on a fixé au début de l'exercice que Edgard est un élève de 10 ans. Mais S est vraie.
- 4) **Faux.** Posons $R = \text{« Edgard va à l'école »}$ et $S = \text{« Edgard a 9 ans »}$. Alors R est vraie, l'implication $R \Rightarrow S$ est fausse. Mais S est fausse.
- 5) **Faux.** Soit R l'affirmation « Edgard a 9 ans » et S l'affirmation « Edgard ne va pas à l'école ». Alors, comme R est fausse, l'implication $R \Rightarrow S$ est vraie. Mais S est fausse.
- 6) **Vrai.** En effet, $(R \text{ ou } S)$ est vraie si et seulement si, soit R est vraie, soit S est vraie, soit R et S sont toutes deux vraies. Alors si R est vraie, $(R \text{ ou } S)$ est aussi vraie.
- 7) **Faux.** Prenons $R = \text{« J'ai un chien »}$ et $S = \text{« J'ai un chat »}$, et supposons que j'ai un chat mais je n'ai pas de chiens. Alors $(R \text{ ou } S)$ est vraie, mais R ne l'est pas.
- 8) **Vrai.** En effet, $(R \text{ et } S)$ est vraie si et seulement si R et S sont toutes deux vraies. Donc si $(R \text{ et } S)$ est vraie, en particulier R est vraie.
- 9) **Faux.** Si $(R \Rightarrow S) \iff (S \Rightarrow R)$ alors les tables logiques de $(R \Rightarrow S)$ et $(S \Rightarrow R)$ sont les mêmes. Mais elles sont

$R \backslash S$	V	F
V	V	F
F	V	V

$R \backslash S$	V	F
V	V	V
F	F	V

qui sont différentes. Comme contre-exemple, on peut utiliser le même exemple qu'en 1).

- 10) **Vrai.** Supposons que $((R \Rightarrow S) \text{ et } (S \Rightarrow T))$ est vraie. Alors $(R \Rightarrow S)$ est vraie et $(S \Rightarrow T)$ est vraie. Nous devons montrer que $R \Rightarrow T$, c'est-à-dire, si R est vraie, alors T est vraie. Supposons donc R vraie et montrons que T est vraie. Comme $(R \Rightarrow S)$ est vraie et R est vraie, S est vraie. Comme $(S \Rightarrow T)$ est vraie et S est vraie, T est vraie.

Remarquons que pour 6), 8), 10) il n'y a rien à vérifier dans le cas où la prémisse est fausse.

Exercice 2

Tables de vérité.

- 1) Nous remplissons la table colonne après colonne. La troisième est la négation de la première et la quatrième est la négation de la deuxième. Pour la colonne de $A \cap B$ on applique la définition de la conjonction : elle n'est vraie que si A et B sont vraies toutes les deux. La colonne suivante en est la négation.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \cap B$	$\neg(A \cap B)$	$\neg A \cup \neg B$
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

La dernière colonne est remplie en appliquant la définition de disjonction. Cette affirmation $\neg A \cup \neg B$ est vraie si $\neg A$ ou $\neg B$ est vraie. On inscrit donc V à chaque fois qu'il apparaît un V dans la colonne de $\neg A$ ou $\neg B$.

- 2) On procède comme dans (a) et on constate que les colonnes de D et E sont les mêmes.

A	B	C	$B \cup C$	D	$A \cap B$	$A \cap C$	E
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Exercice 3

- 1) J'aime tous les légumes.
- 2) Il y a un chat qui n'est pas noir.
- 3) Tous les perroquets parlent.
- 4) Il existe un perroquet qui parle.
- 5) Les perroquets ne parlent jamais.
- 6) Il existe un magasin ouvert tous les jours de la semaine.
- 7) Tous les jours de la semaine, il y a un magasin ouvert.

Exercice 4

Pour tout - il existe.

- 1) Choisissons comme phrase A l'égalité $n = m + 1$.

Alors l'affirmation « Pour tout m , il existe n tel que A » est vraie ; il suffit de poser $n = m + 1$. Par contre, « Il existe n tel que pour tout m , A » est fausse puisque pour n fixé, il existe au plus un nombre naturel m tel que A soit satisfaite.

- 2) Supposons que « Il existe n tel que pour tout m , A », et notons cette valeur de n par N . Alors « Pour tout m , il existe n tel que A » car il suffit de choisir $n = N$.

Exercice 5

Récurrence I. On cherche à calculer la somme des puissances de 2, c'est-à-dire

$$p(n) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n.$$

On calcule $p(0) = 2^0 = 1$, puis $p(1) = 3$, $p(2) = 7$ et $p(3) = 15$. On commence à soupçonner que $p(n) = 2^{n+1} - 1$. Démontrons-le. La formule est correcte pour $n \leq 3$. Supposons donc qu'elle est vraie pour n et démontrons alors qu'elle est aussi vraie pour $n + 1$. Autrement dit nous devons montrer

$$p(n) = 2^{n+1} - 1 \implies p(n+1) = 2^{n+2} - 1.$$

Calculons $p(n+1) = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = p(n) + 2^{n+1}$. La formule étant vraie pour $p(n)$, nous en déduisons que

$$p(n+1) = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 6

Récurrence II. On construit une pyramide avec des blocs de pierre cubiques d'un mètre de côté en commençant avec une base carrée de n mètres de côté. On construit ensuite le deuxième étage de sorte à obtenir des marches d'un demi-mètre de profondeur : le deuxième étage mesure donc $(n-1)$ mètres sur $(n-1)$. On continue ainsi de suite jusqu'au sommet constitué d'un unique bloc de pierre. On appelle $f(n)$ le nombre de cubes qu'il faut pour construire la pyramide.

On calcule $f(1) = 1$, $f(2) = 4 + 1 = 5$ et $f(3) = 9 + 4 + 1 = 14$. Ces valeurs calculées coïncident avec $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour $1 \leq n \leq 3$. Nous sommes donc prêts à démontrer par récurrence que $f(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Nous devons montrer que

$$f(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \implies f(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

La pyramide de base carrée $(n+1) \times (n+1)$ s'obtient à partir de celle de base $n \times n$ en ajoutant un étage de $(n+1)^2$ blocs de pierre. Ainsi, puisque la formule est vraie pour n

$$f(n+1) = f(n) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2.$$

On met au même dénominateur :

$$f(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$$

et on continue le calcul :

$$f(n+1) = \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n+1)[2n^2 + 7n + 6]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}.$$

Heureusement, nous savons ce que nous devons démontrer. Il n'est pas nécessaire de savoir factoriser le polynôme $2n^2 + 7n + 6$, il suffit de calculer

$$(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 4n + 3n + 6 = 2n^2 + 7n + 6.$$

En conclusion, l'hypothèse de récurrence $f(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ implique que le nombre de cubes $f(n+1)$ de pierre qu'il faut pour construire une pyramide d'un étage de plus vaut $\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. La démonstration est terminée.

Exercice 7

Récurrence III. Lorsque $n = 3$, on calcule $3^{2 \cdot 3} - 2^{3-3} = 3^6 - 1 = 729 - 1 = 728 = 7 \cdot 104$. La récurrence est initialisée, nous pouvons démontrer le pas de récurrence.

Supposons donc que $3^{2n} - 2^{n-3}$ est un multiple de 7. Nous devons montrer que $3^{2(n+1)} - 2^{(n+1)-3} = 3^{2n+2} - 2^{n-2}$ est un multiple de 7. Calculons

$$3^{2n+2} - 2^{n-2} = 9 \cdot 3^{2n} - 2^{n-2} = (7+2)3^{2n} - 2^{n-2} = 7 \cdot 3^{2n} + 2 \cdot 3^{2n} - 2^{n-2}.$$

Ce nombre est un multiple de 7 si et seulement si $2 \cdot 3^{2n} - 2^{n-2}$ est un multiple de 7. Or

$$2 \cdot 3^{2n} - 2^{n-2} = 2 \cdot (3^{2n} - 2^{n-3})$$

qui est un multiple de 7 par hypothèse d'induction. Ceci conclut la preuve.

Exercice 8 (Optionnel)

La main magique polonaise. Tiré du webcomic "les céréales du dimanche matin", <http://cereales.lapin.org/index.php?number=1766>

The comic strip illustrates the Polish peasant method for multiplication. It shows a character questioning the method, which involves adding and subtracting terms to reach the product. The comic ends with a punchline about the method being the worst of human nature.

Handwritten text on the left:

$$10[(x-5)+(y-5)] + 1[(10-x) \cdot (10-y)]$$

10 FOIS LA SOMME DES VALEURS POSITIVES 1 FOIS LE PRODUIT DES VALEURS NÉGATIVES

$$= 10x + 10y - 10x - 10y + x \cdot y$$

$$= x \cdot y$$

MAINTENANT QUE VOUS AVEZ LA PREUVE VOUS SAVEZ EXACTEMENT COMMENT ÇA MARCHE.

MAIS... POURQUOI ?

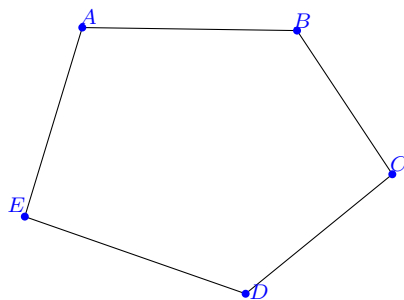
MAIS C'EST PAS DU TOUT SATISFAISANT

ÇA, C'EST LE PIRE CÔTÉ DE LA NATURE HUMAINE.

Exercice 9 (Optionnel)

On se représente ce problème par un *graphe* : les points (appelés *sommets* du graphe) représentent les

personnes et les traits (appelés *arêtes*) indiquent que les personnes reliées par ce trait se connaissent. Ainsi un groupe de trois personnes qui se connaissent toutes entre elles est représenté par un triangle. S'il y a cinq personnes le graphe suivant montre une situation où il n'y a aucun sous-groupe de trois personnes qui se connaissent (puisque le graphe ne contient aucun triangle) :



mais il n'y a pas non plus de sous-groupe de trois personnes qui ne se connaissent pas puisque chaque personne connaît exactement deux personnes. La solution au problème est donc au moins 6 et on peut résoudre le problème par sous-cas pour trouver que $n = 6$...