Cours Euler: Série 24

13 mars 2024

Exercice 1

Pour chacune des relations suivantes, réponds à toutes les questions !

(a) $R\colon \mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{N}$ définie par $nRm \iff n = m + 2$.

(b) $S =$ « est la valeur absolue de » : $\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Z}$.

(c) $T =$ « est le carré de » : $\mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{Z}$.

(d) $U\colon \mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{N}$ définie par $nUm \iff m$ est le carré de n.

1) *Ensemble de définition.* Est-ce que tout élément de l'ensemble de départ est en relation avec un élément ? Sinon, donne un exemple qui ne l'est pas.

2) *Surjection.* Est-ce que tout élément de l'ensemble d'arrivée est en relation avec un élément ? Sinon, donne un exemple qui ne l'est pas.

3) *Fonction.* Est-ce qu'il existe un élément de l'ensemble de départ qui est en relation avec plusieurs éléments ? Si oui, donne un exemple ; sinon, explique pourquoi.

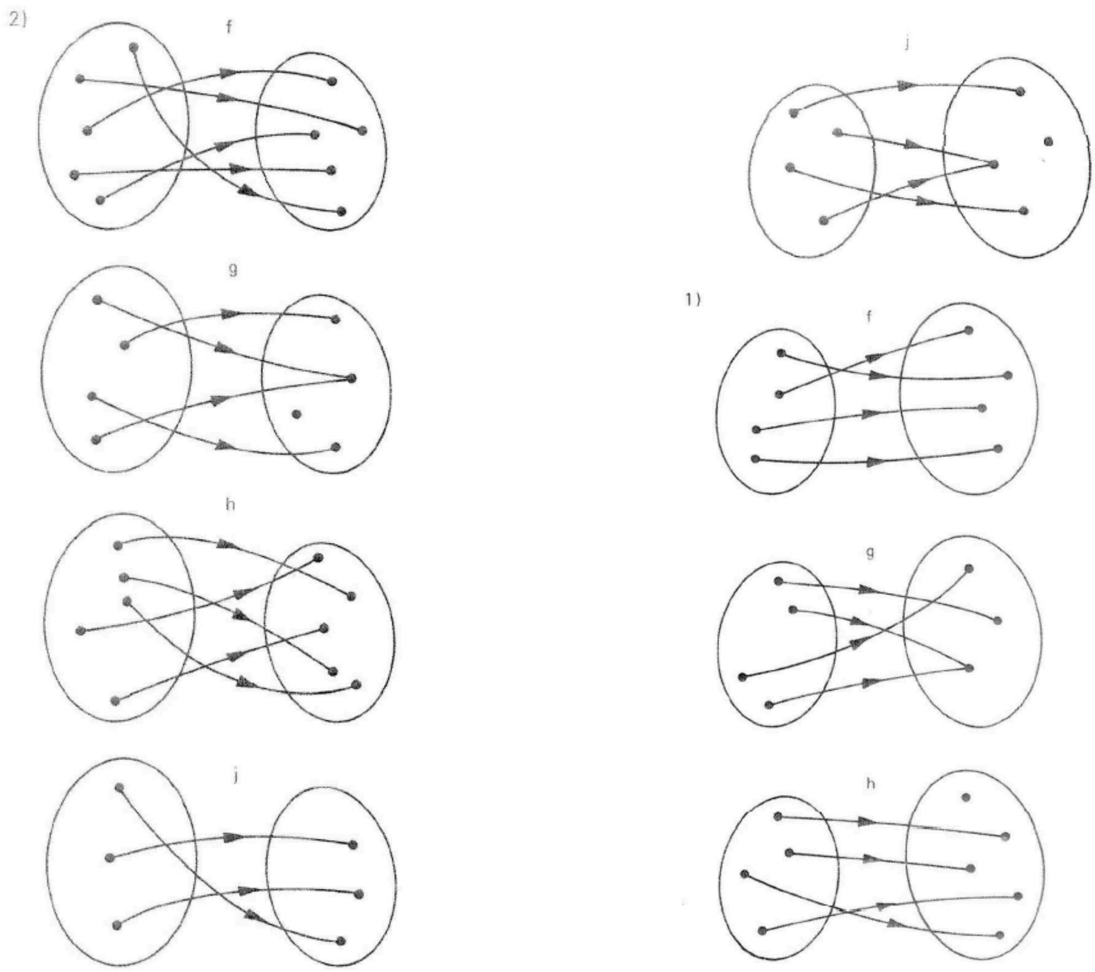
4) *Injection.* Est-ce qu'il existe un élément de l'ensemble d'arrivée qui est en relation avec plusieurs éléments ? Si oui, donne un exemple ; sinon, explique pourquoi.

5) Donne la *représentation graphique* de la relation (avec quelques points qui permettront de voir la forme générale du graphe).

6) Peut-on remplacer l'ensemble de départ ou d'arrivée (ou les deux) par l'un des ensembles $X = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou leur version X^*, X_+ et X_- pour que :
   a) Tout élément de l'ensemble de départ soit en relation avec un élément ?
   b) Tout élément de l'ensemble d'arrivée soit en relation avec un élément ?
   c) Un élément de l'ensemble de départ soit en relation avec au plus un élément ?
   d) Un élément de l'ensemble d'arrivée soit en relation avec au plus un élément ?

Exercice 2

Bijections I. Voici des schémas représentant des fonctions. Lesquelles sont des bijections ? Si ce n'est pas le cas donne une explication. Représente ensuite schématiquement les réciproques des bijections uniquement. Lesquelles de ces réciproques sont des fonctions ?



Exercice 3

Bijections II. Soit $E = \{1; 2; 3; 4\}$ et $F = \{3; 4; 5; 6\}$. Parmi les fonctions f, g, h, j, k et l données ci-dessous, reconnaître celles qui sont des bijections. Donner la réciproque de chacune de ces bijections.

$$\begin{array}{rcl} f\colon E & \longrightarrow & F \\ 1 & \longmapsto & 4 \\ 2 & \longmapsto & 3 \\ 3 & \longmapsto & 6 \\ 4 & \longmapsto & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g\colon E & \longrightarrow & F \\ 1 & \longmapsto & 4 \\ 2 & \longmapsto & 6 \\ 3 & \longmapsto & 3 \\ 4 & \longmapsto & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} h\colon E & \longrightarrow & F \\ 1 & \longmapsto & 6 \\ 2 & \longmapsto & 4 \\ 3 & \longmapsto & 3 \\ 4 & \longmapsto & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} j\colon F \longrightarrow E & k\colon F \longrightarrow E & l\colon F \longrightarrow E \\ 3 \longmapsto 3 & 3 \longmapsto 2 & 3 \longmapsto 1 \\ 4 \longmapsto 2 & 4 \longmapsto 4 & 4 \longmapsto 3 \\ 5 \longmapsto 4 & 5 \longmapsto 1 & 5 \longmapsto 4 \\ 6 \longmapsto 1 & 6 \longmapsto 3 & 6 \longmapsto 3 \end{array}$$

Exercice 4

Relation d'ordre partiel. Avant de te lancer dans cet exercice, relis attentivement la définition d'une relation d'ordre partiel. Vérifie que les relations suivantes sont des relations d'ordre partiel. Il s'agit donc dans chaque cas de vérifier trois propriétés : la réflexivité, l'antisymétrie et la transitivité.

1) Ensemble X quelconque et relation d'égalité.

2) La relation $\leq\colon \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}$.

3) La relation $\geq\colon \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}$.

4) Soit $\mathcal{P}(Y)$ l'ensemble des parties d'un ensemble Y. Considère la relation $\subset\colon \mathcal{P}(Y) \rightsquigarrow \mathcal{P}(Y)$.

5) La relation « divise » : $\mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{N}$ (axiome 2 assez difficile).

Exercice 5

Relation d'ordre. Considère la relation $<\colon \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}$. Ce n'est pas une relation d'ordre partiel. Pourquoi ? (Identifie tous les axiomes qui ne sont pas respectés.)

Une *relation d'ordre* R sur un ensemble X est une relation d'ordre partiel sur X avec l'axiome supplémentaire suivant :

$$\text{Pour tous } x, y \in X, \text{ soit } xRy, \text{ soit } yRx.$$

Parmi les relations de l'exercice précédent, lesquelles sont des relations d'ordre ? Pour celles qui n'en sont pas, donne deux éléments $x, y \in X$ qui ne vérifient pas cet axiome supplémentaire.

Exercice 6

Relations entre nombres réels. Donne une représentation graphique des relations R suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Lesquelles sont des fonctions ?

1) $xRy \iff y = 3x$

2) $xRy \iff x = 3y$

3) $xRy \iff 2(x+y) = 3$

4) $xRy \iff |x| \leq |y|$

5) $xRy \iff 3 \mid x - y \in \mathbb{Z}$.

6) $xRy \iff x^2 + y^2 = 1$

Exercice 7

Une *relation d'équivalence* sur un ensemble X est une relation $E\colon X \rightsquigarrow X$ telle que :

(i) xEx pour tout $x \in X$ (réflexivité),

(ii) $xEy \Rightarrow yEx$, pour tous $x, y \in X$ (symétrie),

(iii) xEy et $yEz \Rightarrow xEz$, pour tous $x, y, z \in X$ (transitivité).

Partie 1. Vérifie que les relations suivantes sont des relations d'équivalence :

a) Relation d'égalité sur un ensemble A.

b) Pour construire les rationnels à partir des entiers, on a considéré les symboles de fractions $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ et on a défini que deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont équivalentes si

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

Vérifie, en utilisant cette définition, que l'équivalence de fractions est bien une relation d'équivalence.

Partie 2. Détermine si les relations suivantes $R\colon \mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Z}$ vérifient la réflexivité, la symétrie ou la transitivité. Si oui, montre-le, sinon, donne un contre-exemple

a) $mRn \iff m$ divise n.

b) $mRn \iff m \leq n$

c) $mRn \iff m < n$

d) $m^2 + m = n^2 + n$

Partie 3. (Difficile et facultatif, mais intéressant !) Rappelons que Id_X dénote la relation d'égalité sur X. Démontre qu'une relation $R\colon X \rightsquigarrow X$ est une relation d'équivalence sur X si et seulement si son graphe $R \subset X \times X$ vérifie les propriétés suivantes :

(i) $Id_X \subset R$,

(ii) $R^{-1} \subset R$,

(iii) $R \circ R \subset R$.

Exercice 8

1) Soit $R : X \rightsquigarrow Y$ une relation et $Id_Y : Y \rightsquigarrow Y$ la relation d'égalité, c'est-à-dire

$$y(Id_Y)y' \iff y = y'.$$

Quelle est la relation composée $Id_Y \circ R : X \rightsquigarrow Y$? Prouve ton affirmation.

2) Soit $R : X \rightsquigarrow Y$ et $S : Y \rightsquigarrow Z$ des relations. Donne, pour les relations ci-dessous, la représentation logique de la relation composée $S \circ R : X \rightsquigarrow Z$ en n'utilisant que les ensembles X et Z. Justifie.

Exemple : Soient $X = \{\text{auteurs}\}$, $Y = \{\text{manuscrits}\}$ et $Z = \{\text{éditeurs}\}$. Soient les relations $R\colon X \rightsquigarrow Y$ telle que $xRy \iff$ « l'auteur x a écrit le manuscrit y » pour tous $(x, y) \in X \times Y$ et $S\colon Y \rightsquigarrow Z$ telle que $ySz \iff$ « le manuscrit y a été publié par l'éditeur z » pour tous $(y, z) \in Y \times Z$. La relation composée est la relation $S \circ R\colon X \rightsquigarrow Z$ telle que $x(S \circ R)z \iff$ « l'auteur x a été publié chez l'éditeur z » pour tous $(x, z) \in X \times Z$ (et on ne fait plus référence à l'ensemble intermédiaire des manuscrits).

a) $X = \{\text{villes}\}$, $Y = \{\text{pays}\}$, $X = \{\text{continents}\}$ et $R = S$ est la relation d'appartenance : $xRy \iff x \in y$.
b) $X, Y, Z = \mathbb{Q}$ et R définie par $rRs \iff$ « s est le carré de r » et S définie par $sSt \iff$ « t est le cube de s ».
c) $X = Y = Z = \mathbb{Z}$ et $R = S$ définie par $mRn \iff m$ est le carré de n.
d) $X = \mathbb{R}_+, Y = \mathbb{R}_+, Z = \mathbb{R}_+$, $xR\sqrt{x}$ et $yS(y+1)^2$.

Exercice 9

On considère les polynômes $f = x^2 - x - 2$ et $g = x^2 - 2x + 1$ dans $\mathbb{R}[x]$. On définit une relation R en posant xRy si et seulement si $x = f(y) \cdot g(y)$ et une relation S en posant xSy si et seulement si $y = f(x) \cdot g(x)$.

1) Donne une expression *réduite* pour chacune des deux relations.

2) Explique pourquoi S est une fonction.

3) Calcule $f(-1)$ et $g(1)$. Trouve ensuite deux valeurs distinctes de y telles que $0Ry$ et déduis-en que R n'est pas une fonction.

4) Calcule $(g \circ f)(x)$.

Exercice 10 (Optionnel)

La fameux problème de Singapour. Pour penser à autre chose ou à garder pour les vacances... Vous avez peut-être entendu parler de ce problème de logique. Il est destiné à des élèves de 14 ans à Singapour et ne sera pas corrigé.

Albert et Bernard sont récemment devenus amis avec Cheryl et ils aimeraient connaître la date de son anniversaire. Cheryl leur donne une liste de 10 dates possibles :

15 mai	16 mai	19 mai
17 juin	18 juin	
14 juillet	16 juillet	
14 août	15 août	17 août

Cheryl dit ensuite à Albert quel mois elle est née et à Bernard elle donne le jour. On peut ensuite entendre le dialogue suivant :

Albert : « Je ne sais pas quand est l'anniversaire de Cheryl, mais je sais par contre que Bernard ne le sais pas non plus. »

Bernard : « D'abord je ne savais pas quand était l'anniversaire de Cheryl, mais maintenant je le sais. »

Albert : « Mais alors moi aussi je sais ! »

Quel jour est née Cheryl ?