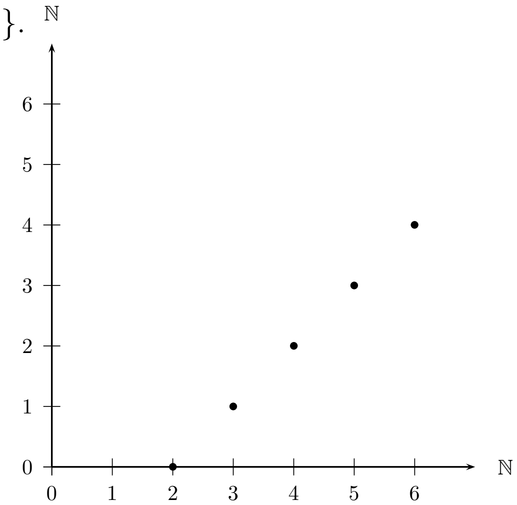
Cours Euler: Corrigé 24

4 mars 2026

Exercice 1

(a) $\mathcal{R}\colon \mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{N}$ définie par $n\mathcal{R}m \iff n = m + 2$.

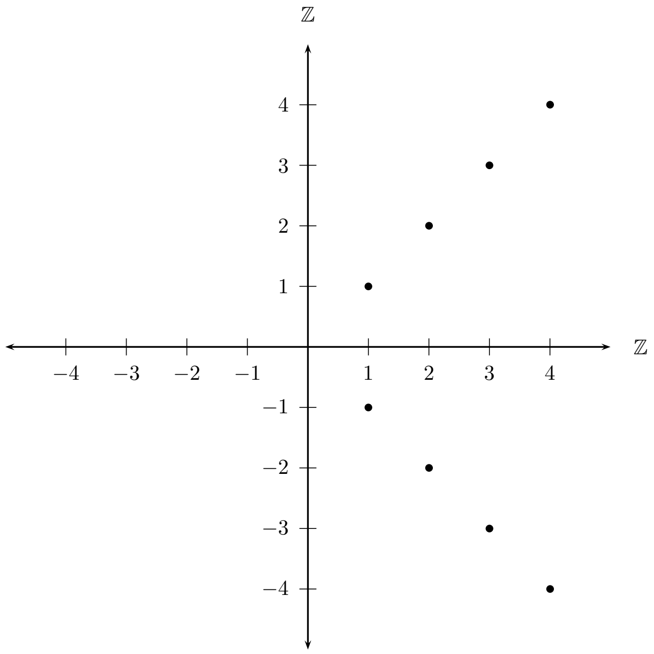
1. Non, la relation doit être restreinte à $\mathbb{N} - \{0, 1\}$.
2. Oui, si on choisit un m dans $\mathbb{N}$ arbitrairement, alors le nombre $2 + m$ est en relation avec m.
3. Non, chaque élément de l'ensemble de départ $\mathbb{N}$ est en relation avec au plus un élément de l'ensemble d'arrivée, qui est $n - 2$.
4. Non, chaque élément m de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{N}$ est en relation avec un seul élément de l'ensemble de départ, qui est $m + 2$.
5. Représentation ensembliste sous forme de liste : $\{(2, 0), (5, 3), (59, 57), \ldots\}$, c'est-à-dire $R = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | n = m + 2\}$.



6. i) Oui, si on remplace l'ensemble d'arrivée par $\mathbb{Z}$, alors tout élément de l'ensemble de départ est en relation avec un élément. En effet, si $n \in \mathbb{N}$, alors $n\mathcal{R}(n-2)$. Remarquer que $n - 2$ n'est pas toujours un élément de $\mathbb{N}$, car $n - 2$ peut être un nombre négatif.
   ii) Comme nous l'avons vu, tout élément de l'ensemble d'arrivée est déjà en relation avec un élément de l'ensemble de départ.
   iii) Comme nous l'avons vu, tout élément de l'ensemble de départ est déjà en relation avec au plus un élément de l'ensemble d'arrivée.
   iv) Tout élément de l'ensemble d'arrivée est en relation avec exactement un élément de l'ensemble de départ, donc tout élément de l'ensemble d'arrivée est en relation avec au plus un élément de l'ensemble de départ.

(b) $\mathcal{S} =$ « est la valeur absolue de » : $\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Z}$.

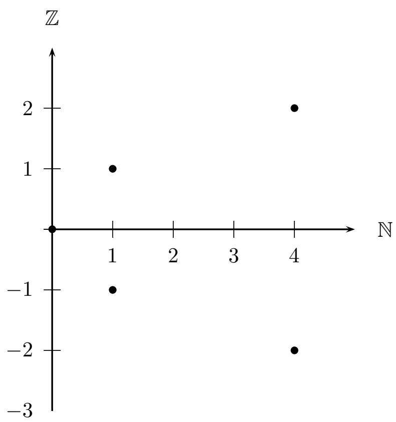
1. Non, la relation doit être resteinte à l'ensemble de départ $\mathbb{N}$.
2. Oui, si on choisit un b dans $\mathbb{Z}$ arbitrairement, alors le nombre $|b|$ est en relation avec b.
3. Oui, 2 est la valeur absolue de -2 et 2 est la valeur absolue de 2.
4. Non, chaque élément b de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{Z}$ est en relation avec un seul élément de l'ensemble de départ. Cet élément de l'ensemble de départ est $|b|$.
5. Représentation ensembliste sous forme de liste : $\{(0,0),(1,-1),(1,1),(2,-2),(2,2),\ldots\}$, c'est-à-dire $S = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | a = |b|\}$



6. i) Il suffit de remplacer l'ensemble de départ par $\mathbb{Z}_+$.
   ii) C'est déjà fait.
   iii) Il suffit de remplacer l'ensemble de départ par $\mathbb{Z}_+$ ou $\mathbb{Z}_-$.
   iv) C'est déjà fait.

(c) $\mathcal{T} =$ « est le carré de » : $\mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{Z}$.

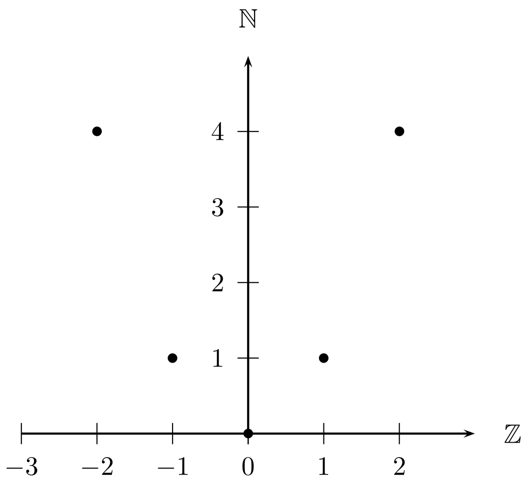
1. Non, il faut restreindre la relation à l'ensemble de départ $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ est un carré}\}$.
2. Oui, si on choisit un m dans $\mathbb{Z}$ arbitrairement, alors le nombre m^2 est en relation avec m.
3. Oui, 9 est le carré de 3 et 9 est la valeur absolue de -3.
4. Non, un élément $m \in \mathbb{Z}$ est en relation avec un seul élément de l'ensemble de départ $\mathbb{N}$, qui est m^2.
5. Représentation ensembliste sous forme de liste : $\{(0,0),(1,-1),(1,1),(4,-2),(4,2),\ldots\}$. i.e. $T = \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} | n = m^2\}$



6. i) Il suffit de remplacer l'ensemble d'arrivée par $\mathbb{R}$. Ainsi, un élément n de l'ensemble de départ $\mathbb{N}$ est toujours le carré d'un nombre réel.
   ii) C'est déjà fait.
   iii) il faut remplacer $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{N}$ (4 est en relation avec 2 et -2).
   iv) C'est déjà fait.

(d) $\mathcal{U}\colon \mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{N}$ définie par $n\mathcal{U}m \iff m$ est le carré de n.

1. Oui, car aucune condition n'est imposée sur n, et tout n admet un carré.
2. Non, pour le nombre 5 on ne peut pas trouver de nombre $n \in \mathbb{Z}$ tel que $5 = n^2$.
3. Non, à tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on ne peut faire correspondre un unique nombre n^2.
4. Oui, 4 est le carré de 2 et 4 est le carré de -2.
5. Représentation ensembliste sous forme de liste : $\{(0,0),(-1,1),(1,1),(-2,4),(2,4),\ldots\}$, i.e. $U = \{(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} | m = n^2\}$



6. i) C'est déjà fait.
   ii) Il suffit de remplacer l'ensemble de départ par $\mathbb{R}$. Ainsi, un élément m de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{N}$ est toujours le carré d'un nombre réel.
   iii) C'est déjà fait.
   iv) Il faut remplacer $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{N}$.

Exercice 2

Bijections I.

2) f, h et i sont des bijections. La fonction g n'est pas une bijection. Il y a un élément de l'ensemble d'arrivée qui n'est pas atteint et un autre qui est touchée deux fois.
1) f est une bijection. Les autres non, pour les mêmes raisons que g dans la première colonne.

On obtient les schéma des réciproques des bijections simplement en changeant le sens des flèches. Remarquons que les réciproques des fonctions qui ne sont pas des bijections ne sont pas des fonctions.

Exercice 3

Bijections II. Les fonctions f, h, j et k sont des bijections. En revanche g et l n'en sont pas. Par exemple $g(1) = g(4)$ ce qui empêche g d'être injective et 6 ne se trouve pas dans l'image de l, ce qui empêche l d'être surjective.
On observe qu'une fonction entre deux ensembles ayant le même nombre (fini) d'éléments ne peut être injective si elle n'est pas surjective, et vice-versa ! Si deux éléments ont la même image, alors on aura utilisé trop d'éléments de l'ensemble de départ pour pouvoir atteindre tous ceux de l'ensemble d'arrivée et, réciproquement, si un élément de l'ensemble d'arrivée n'est pas atteint, cela signifie obligatoirement que l'on a dû envoyer deux éléments différents sur la même image…

$f^{-1} : F \longrightarrow E$	$h^{-1} : F \longrightarrow E$	$j^{-1} : E \longrightarrow F$	$k^{-1} : E \longrightarrow F$
$3 \longmapsto 2$	$3 \longmapsto 3$	$1 \longmapsto 6$	$1 \longmapsto 5$
$4 \longmapsto 1$	$4 \longmapsto 2$	$2 \longmapsto 4$	$2 \longmapsto 3$
$5 \longmapsto 4$	$5 \longmapsto 4$	$3 \longmapsto 3$	$3 \longmapsto 6$
$6 \longmapsto 3$	$6 \longmapsto 1$	$4 \longmapsto 5$	$4 \longmapsto 4$

Exercice 4

Relation d'ordre partiel.
1. Ensemble X quelconque et relation d'égalité.

(i) L'axiome 1 est vérifié pour tout $x \in X$ car $x = x$ pour tout $x \in X$.

(ii) L'axiome 2 est vérifié car $x = y$ et $x = y$ impliquent bien que $x = y$ pour tout $x, y \in X$.

(iii) L'axiome 3 est vérifié car $x = y$ et $y = z$ impliquent bien $x = z$ pour tout $x, y, z \in X$.

2. La relation $\leq : \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}$.

(i) L'axiome 1 est vérifié pour tout $x \in \mathbb{R}$ car $x \leq x$.

(ii) $x \leq y$ et $y \leq x \Longleftrightarrow x = y$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ donc l'axiome 2 est vérifié.

(iii) $x \leq y$ et $y \leq z \Longleftrightarrow x \leq z$ pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$ donc l'axiome 3 est vérifié.

3. La relation $\geq : \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}$.

(i) Comme dans le cas précédent, l'axiome 1 est vérifié.

(ii) $x \geq y$ et $y \geq x \Longleftrightarrow x = z$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ donc l'axiome 2 est vérifié.

(iii) $x \geq y$ et $y \geq z \Longleftrightarrow x = z$ pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$ donc l'axiome 3 est vérifié.

4. Soit $\mathcal{P}(Y)$ l'ensemble des parties d'un ensemble Y. Considère la relation $\subset : \mathcal{P}(Y) \rightsquigarrow \mathcal{P}(Y)$.

(i) La relation $A \subset A$ pour tout $A \in X$ est toujours vérifiée, donc l'axiome 1 est vérifié.

(ii) $A \subset B$ et $B \subset A \Longleftrightarrow A = B$ $A, B \in X$ donc l'axiome 2 est vérifié.

(iii) $A \subset B$ et $B \subset C \Longleftrightarrow A \subset C$ pour tout $A, B, C \in X$ donc l'axiome 3 est vérifié.

5. La relation « divise » : $\mathbb{N} \rightsquigarrow \mathbb{N}$.

(i) L'axiome 1 est toujours vérifié car $n|n$ pour tout $n \in X$.

(ii) Si $n|m$ et $m|n$, alors il existe deux nombres a et b dans X tels que $an = m$ et $bm = n$. Alors $abm = m$, donc $ab = 1$. Donc $a = b = 1$ car $a, b \in \mathbb{N} = X$. Donc $n = m$. Ainsi l'axiome 2 est vérifié.

(iii) Si $n|m$ et $m|o$, alors il existe deux nombres $a, b \in X$ tels que $an = m$ et $bm = o$. Donc $abn = o$ donc $n|o$. Ainsi l'axiome 3 est vérifié.

Exercice 5

Relation d'ordre. L'axiome 1 n'est pas vérifié, car $x < x$ implique que $x \neq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'axiome 2 est vérifié ! La condition $x < y$ et $y < x$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, n'est jamais vraie. L'axiome 2 est :

$$\text{Si } x < y \text{ et } y < x \text{ est vrai, alors } x = y$$

C'est-à-dire, à chaque fois que $x < y$ et $y < x$ sont vrais, alors nous avons que $x = y$. Comme $x < y$ et $y < x$ n'est jamais vérifié, l'implication est toujours vraie. Plus précisément : un énoncé $A \Rightarrow B$

se formule

$$B \quad \text{ou} \quad \text{non } A$$

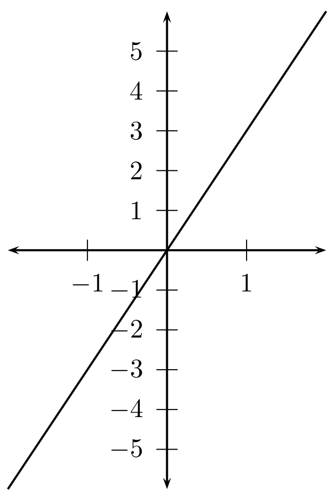
donc cet énoncé est vrai si B est vrai ou si non A est vrai, ou les deux en même temps (le "ou" mathématique n'est pas le "ou" exclusif, ie les deux assertions B et non A peuvent être vraies en même temps). Mais dire que non A est vrai est équivalent à dire que A est faux. Donc $A \Rightarrow B$ est vrai si B est vrai ou si A est faux. Dans notre cas A est toujours faux, donc $A \Rightarrow B$ est vrai !

1. Prenons par exemple $X = \mathbb{N}$. Alors 3 n'est pas égal à 2 et 2 n'est pas égal à 3. Donc $=$ n'est pas une relation d'ordre. (En fait $=$ est une relation d'ordre seulement sur l'ensemble à un élément).
2. Cet ensemble muni de la relation $\leq$ vérifie ce nouvel axiome.
3. Idem avec la relation $\geq$.
4. Si $Y = \{0, 1\}$, alors $X = \mathcal{P}(Y) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Donc les éléments $\{0\} \in X$ et $\{1\} \in X$ ne vérifient pas le nouvel axiome.
5. Cet ensemble muni de la relation « divise » ne vérifie pas ce nouvel axiome car par exemple 2 ne divise pas 3 et 3 ne divise pas 2.

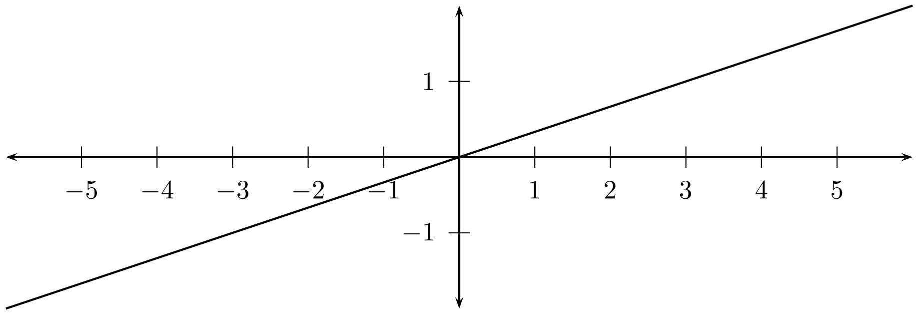
Exercice 6

Relations entre nombres réels. Les seules fonctions sont visiblement les trois premières !

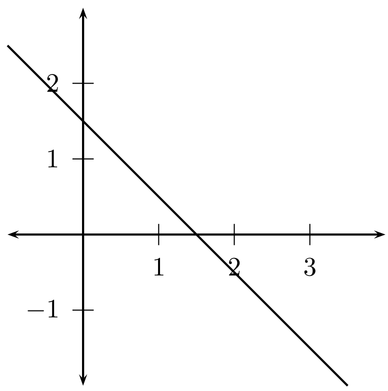
1) $xRy \iff y = 3x$.



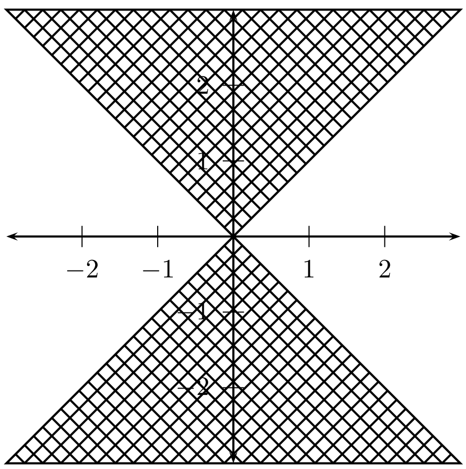
2) $xRy \iff y = \frac{1}{3}x$.



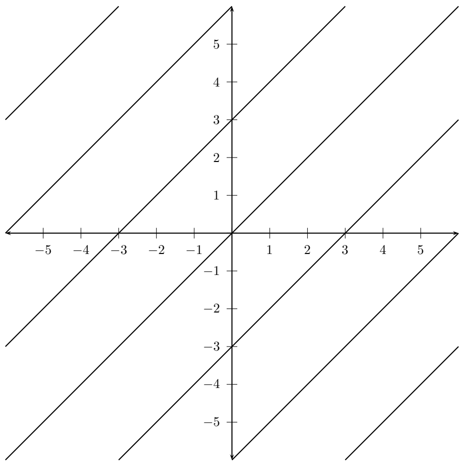
3) $xRy \iff y = -x + \frac{3}{2}$.



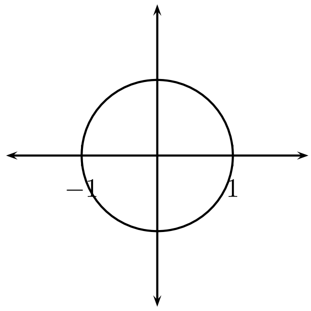
4)



5) $xRy \iff x - y = 3a, a \in \mathbb{Z} \iff y = x - 3a$. On obtient ainsi des droites de pente 1 décalées verticalement de 3.



6) L'ensemble des points (x,y) vérifiant $x^2+y^2=1$ est représenté graphiquement par un cercle de rayon 1 centré en $(0,0)$. On l'obtient par Pythagore : $x^2+y^2=1 \iff$ la distance du point (x,y) à l'origine du repère vaut 1.



Exercice 7

Partie 1.

a) On a bien que $x=x$ pour tout $x\in A$, donc la réflexivité est vérifiée.
Si $x=y$, alors $y=x$ pour tout $x,y\in A$, donc la symétrie est vérifiée.
Si $x=y$ et $y=z$, alors $x=z$, donc la transitivité est vérifiée.

b) On a bien que $\frac{a}{b}$ est équivalent à $\frac{a}{b}$, pour tout $a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0$, donc la réflexivité est vérifiée.
Si $\frac{a}{b}$ est équivalent à $\frac{c}{d}$ alors $ad=bc$ donc $cb=da$, d'où $\frac{c}{d}$ est équivalent à $\frac{a}{b}$, pour tout $a,b,c,d\in\mathbb{Z}, b\neq 0, d\neq 0$, donc la symétrie est vérifiée.
Soit $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{Z}, b\neq 0, d\neq 0, f\neq 0$. Si $\frac{a}{b}$ est équivalent à $\frac{c}{d}$ et $\frac{c}{d}$ est équivalent à $\frac{e}{f}$, alors $ad=bc$ et $cf=de$ qui s'écrit aussi : $d=\frac{cf}{e}$. Alors en utilisant la première égalité, on trouve $\frac{acf}{e}=\frac{b}{c}$ c'est-à-dire $af=be$. D'où $\frac{a}{b}$ est équivalent à $\frac{e}{f}$.Donc la transitivité est vérifiée.

Partie 2.

a) Si $n\in\mathbb{Z}$, alors n divise n, donc la réflexivité est vérifiée.
Soient $m=3$ et $n=6$. Alors m divise n, mais n ne divise pas m. Donc la symétrie n'est pas vérifiée.
Soient $m,n,k\in\mathbb{Z}$ tels que m divise n et n divise k. Alors il existe $a,b\in\mathbb{Z}$ tels que $am=n$ et $bn=k$. Donc $abm=k$, donc m divise k. Donc la transitivité est vérifiée.

b) Si $n\in\mathbb{Z}$, alors $n\leq n$ donc la réflexivité est vérifiée.
Soient $m=2$ et $n=9$. Alors $m\leq n$ mais $n\nleq m$ donc la symétrie n'est pas vérifiée.
Soient $m,n,k\in\mathbb{Z}$ tels que $m\leq n$ et $n\leq k$. Alors $m\leq k$. Donc la transitivité est vérifiée.

c) Si $n\in\mathbb{Z}$, alors $n\nless n$, donc la réflexivité n'est pas vérifiée.
Soient comme précédemment $m=2$ et $n=9$. Alors $m<n$, mais $n\nless m$ donc la symétrie n'est pas vérifiée.
Soient $m,n,k\in\mathbb{Z}$ tels que $m<n$ et $n<k$. Alors $m<k$. Donc la transitivité est vérifiée.

d) Si $n\in\mathbb{Z}$, alors $n^2+n=n^2+n$, donc la réflexivité est vérifiée.
Soient $n,m\in\mathbb{Z}$ tels que $m^2+m=n^2+n$. Alors $n^2+n=m^2+m$, donc la symétrie est vérifiée.
Soient $n,m,k\in\mathbb{Z}$ tels que $m^2+m=n^2+n$ et $n^2+n=k^2+k$. Alors $m^2+m=k^2+k$ donc la transitivité est vérifiée.

Partie 3. Avant de commencer, rappelons ce qu'est le graphe d'une relation $R : X \rightsquigarrow Y$: c'est l'ensemble $R\subset X\times Y$ tel que

$$(x,y)\in R \Longleftrightarrow xRy$$

Soit $R : X \rightsquigarrow X$ une relation d'équivalence. Montrons que son graphe $R \subset X \times X$ vérifie les propriétés (i) à (iii) :

(i) Soient $(x, y) \in Id_X$. Alors xId_Xy (puisque $x = x$), donc $x = y$. Comme R est une relation d'équivalence, alors xRx est vrai. Donc xRy est vrai puisque $x = y$. Donc la couple (x, y) appartient au graphe de R, ce qui s'écrit : $(x, y) \in R$.

(ii) Rappelons que
$$xR^{-1}y \iff yRx$$
Soit $(x, y) \in R^{-1}$. Nous devons montrer que $(x, y) \in R$.
On a que $xR^{-1}y$ est vrai, donc yRx est vrai. Puisque R est une relation d'équivalence, alors xRy est vrai. Donc $(x, y) \in R$.

(iii) Rappelons que
$$xR \circ Rz \iff \text{il existe } y \in X \text{ tel que } xRy \text{ et } yRz$$
Soit $(x, z) \in R \circ R$. Nous devons montrer que $(x, z) \in R$.
On a que $xR \circ Rz$ est vrai. Donc il existe $y \in X$ tel que xRy et yRz. Puisque R est une relation d'équivalence, alors xRz est vrai. Donc $(x, z) \in R$.

On a montré que le graphe de R vérifie les propriétés (i) à (iii). Maintenant, montrons que si la graphe de R vérifie les propriétés (i) à (iii), alors R est une relation d'équivalence :

- Réflexivité : Soit $x \in X$. Alors xId_Xx, donc $(x, x) \in Id_X$. Puisque $Id_x \subset R$, alors $(x, x) \in R$, alors xRx est vrai. Donc la relation R est réflexive.
- Symétrie : Soit $x, y \in X$ tels que xRy. Nous devons montrer que yRx. On a que $yR^{-1}x$ est vrai. Donc $(y, x) \in R^{-1}$. Puisque $R^{-1} \subset R$, alors $(y, x) \in R$. Donc yRx est vrai. La relation R est ainsi symétrique.
- Transitivité : Soient $x, y, z \in X$ tels que xRy et yRz. Nous devons montrer que xRz. On a que $xR \circ Rz$ est vrai, donc $(x, z) \in R \circ R$. Puisque $R \circ R \subset R$, alors $(x, z) \in R$. Donc xRz est vrai.

Finalement, R est donc bien une relation d'équivalence.

Exercice 8

1) La relation composée $Id_Y \circ R$ est la même que R dans le sens que pour tous $(x, y) \in X \times Y$, $xRy \iff x(Id_Y \circ R)y$.

   Preuve : Soit un couple $(x, y) \in X \times Y$ tel que xRy. Alors l'affirmation $y(Id_Y)y$ est vraie. Donc l'affirmation $x(Id_y \circ R)y$ est vraie, car l'élément $y \in Y$ vérifie xRy et $y(Id_Y)y$.

   On a donc démontré que si xRy, alors $x(Id_y \circ R)y$. Pour compléter la preuve, on doit montrer la *réciproque*, ie si $x(Id_Y \circ R)y$, alors xRy.

   Supposons donc que $x(Id_Y \circ R)y$, et montrons que xRy. Par définition, il existe $z \in Y$ tel que xRz et $z(Id_Y)y$. Mais $z(Id_Y)y \iff z = y$, donc xRy est vrai. La preuve est donc terminée.

2)
   1. $\forall (x, z) \in X \times Z, \quad x(S \circ R)z \iff x$ est une ville sur le continent z.
   2. $\forall (r, t) \in X \times Z, \quad r(S \circ R)t$ si et seulement s'il existe $s \in \mathbb{Q}$ tel que $s = r^2$ et $t = s^3$, c'est-à-dire si et seulement si $t = (r^2)^3 = r^6$. Il s'agit de la composition de deux fonctions et donc on obtient une fonction.
   3. $\forall (m, p) \in X \times Z, \quad m(S \circ R)p \iff$ il existe un $n \in \mathbb{Z}$ tel que $m = n^2$ et $n = p^2 \iff m = p^4$.

4. Il s'agit de deux fonctions et donc leur composée est une fonction. La composition de ces deux fonctions est alors $xC\left(\sqrt{x}+1\right)^2 = x + 2\sqrt{x} + 1$ pour tout $x \geq 0$.

Exercice 9

On considère les polynômes $f = x^2 - x - 2$ et $g = x^2 - 2x + 1$ dans $\mathbb{R}[x]$. On définit une relation R en posant xRy si et seulement si $x = f(y) \cdot g(y)$ et une relation S en posant xSy si et seulement si $y = f(x) \cdot g(x)$.

1. Il faut donc calculer le produit $(x^2 - x - 2) \cdot (x^2 - 2x + 1)$ des deux polynômes. On utilise la distributivité :

$$x^2 \cdot x^2 + x^2 \cdot (-2x) + x^2 - x \cdot x^2 - x \cdot (-2x) - x - 2x^2 - 2 \cdot (-2x) - 2 = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$$

   Ainsi la relation R est donnée par xRy si et seulement si $x = y^4 - 3y^3 + y^2 + 3y - 2$, alors que $xS(x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. La relation S est une fonction, car elle est définie par la fonction polynomiale $h(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$, de degré 4. Tout nombre réel x de l'ensemble de départ est en relation avec un unique nombre y de l'ensemble d'arrivée, à savoir $y = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$.
3. On calcule $f(-1) = 0$ et $g(1) = 0$. En fait le polynôme $f = (x+1)(x-2)$ et $g = (x-1)^2$. On en déduit que $h(-1) = 0$ et $h(1) = 0$. Par conséquent $0R1$ et $0R-1$. La relation R n'est pas une fonction.
4. Il ne faut pas confondre le produit avec la composition ! Même dans ce cas où le degré du résultat est le même car $2^2 = 2 \cdot 2$ les polynômes obtenus ne sont pas les mêmes ! La composition est

$$(g \circ f)(x) = g(x^2 - x - 2) = (x^2 - x - 2 - 1)^2 = (x^2 - x - 3)^2 = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x + 9$$

Exercice 10 (Optionnel)

Parmi toutes les dates que propose Cheryl, quatre mois différents apparaissent, chacun d'eux au moins deux fois. Evidemment, Albert ne peut pas connaître la date de l'anniversaire de Cheryl en ne connaissant que le mois. Par contre s'il sait que Bernard ne connaît pas la date non plus, c'est que le jour que lui a donné Cheryl apparaît aussi plusieurs fois dans la liste !
Ceci élimine donc le 18 et le 19, ce qui signifie que le mois indiqué par Cheryl n'est ni le mois de mai, ni le mois de juin. Le jour de l'anniversaire ne peut donc être que l'une des cinq dates proposées en juillet ou en août.
Analysons maintenant l'affirmation de Bernard. Grâce au raisonnement que nous (et lui) venons de faire, il connaît maintenant la date. Ceci veut dire que le jour que Cheryl lui a soufflé à l'oreille n'est pas le 14, il hésiterait encore entre juillet et août. Conclusion : l'anniversaire de Cheryl tombe un 16 juillet, un 15 août ou un 17 août.
Finalement Albert aussi, ayant fait ce raisonnement, trouve la date. Lui ne connaissant que le mois, cela doit être le mois de juillet. Cheryl est née un 16 juillet.