Cours Euler: Corrigé 23

6 mars 2024

Exercice 1

Un peu de théorie : Vrai ou faux ?

1. L'équation $ax - \sqrt{2} = 0$ a une unique solution pour toute valeur de $a \in \mathbb{R}$. C'est faux. Lorsque $a = 0$ l'équation est $-\sqrt{2} = 0$ qui n'a pas de solution. Par contre l'équation a une unique solution pour tout $a \neq 0$.
2. L'équation $ax - \sqrt{2} = 0$ a une unique solution pour certaines valeurs de $a \in \mathbb{Q}$. C'est vrai. Lorsque $a = 1$ la seule solution est $x = \sqrt{2}$. Personne ne dit que la solution doit être rationnelle !
3. L'équation $x - a\sqrt{2} = 0$ a une unique solution pour toute valeur de $a \in \mathbb{R}$. C'est vrai. La seule solution est $x = a\sqrt{2}$.
4. L'équation $x - a\sqrt{2} = 0$ a une unique solution rationnelle pour certaines valeurs de $a \in \mathbb{Q}$. C'est faux. Lorsque $a \in \mathbb{Q}$ le nombre $a\sqrt{2}$ n'est jamais rationnel.
5. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a exactement deux solutions pour toutes valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$. C'est faux. Lorsque $a = 1$, $b = 0$ et $c = 1$ on obtient l'équation $x^2 + 1 = 0$. Or x^2 ne peut jamais être égal à -1 lorsque x est un nombre réel.
6. L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a exactement deux solutions pour certaines valeurs de $a, b, c \in \mathbb{Q}$. C'est vrai. Lorsque $a = 1$, $b = 0$ et $c = -1$ on trouve l'équation $x^2 - 1$ que nous avons étudiée ci-dessus.
7. L'équation $x^2 + 2x + c = 0$ n'a aucune solution pour toute valeur $c \geq 10$. C'est vrai. En effet

$$x^2 + 2x + c = x^2 + 2x + 1 + (c - 1) = (x + 1)^2 + c - 1.$$

L'expression $(x + 1)^2$ étant un carré, elle est toujours positive ou nulle. Puisque $c \geq 10$, la somme $(x + 1)^2 + c - 1$ est strictement positive et ne s'annule donc jamais.

Exercice 2

Un problème de Nicolas Chuquet, 1484. Un marchand participe à 3 foires. Il possède x pistoles. A la première foire il double son argent et dépense 30 pistoles. Il lui reste donc $2x - 30$ pistoles. A la deuxième il triple son argent et dépense 54 pistoles. Il possède donc

$$3(2x - 30) - 54 = 6x - 90 - 54 = 6x - 144.$$

A la dernière il quadruple son argent puis dépense 72 pistoles. Il lui reste alors

$$4(6x - 144) - 72 = 24x - 576 - 72 = 24x - 648.$$

Il s'agit de 48 pistoles. L'information que nous donne M. Chuquet signifie que $24x - 648 = 48$. Autrement dit

$$24x = 648 + 48 = 696 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{696}{24} = \frac{348}{12} = \frac{174}{6} = \frac{87}{3} = 29.$$

S'il avait eu 27 pistoles au départ, il aurait tout dépensé à la fin !

Exercice 3 (Optionnel)

Justin Bieber et Miley Cyrus vont au restaurant ensemble et commandent exactement le même menu. A eux deux ils ont 100\$. M. Bieber dépense la moitié de son argent et il reste 10\$ à Mlle Cyrus à la fin du repas. Pose les équations qui correspondent à ce problème et calcule combien d'argent Justin Bieber avait en poche avant le repas.

Soit x l'argent que possède Justin Bieber. On sait qu'il dépense la moitié $\frac{x}{2}$. Comme Miley Cyrus dépense la même chose et qu'il ne lui reste que 10\$ à la fin du repas, on en conclut qu'elle possédait au début $\frac{x}{2}+10$. L'information qu'on nous donne est qu'ensemble ils ont 100\$. L'équation correspondante est

$$x + \left(\frac{x}{2} + 10\right) = 100.$$

Pour résoudre cette équation affine, il faut l'écrire sous forme réduite : $\frac{3x}{2} = 90$ ou encore $x = 60$. Ainsi M. Bieber possédait 60\$ avant le repas (et Mlle Cyrus 40\$). Chacun dépense 30\$ pour son menu.

Exercice 4

Equations avec paramètre(s).

(a) $2x - 3(x + a) = 3x - 7a$. Cette équation est équivalente à $-4x + 4a = 0$, autrement dit $x = a$. Puisque a est un réel fixé, il n'y a aucune valeur de a pour laquelle $S = \mathbb{R}$ et il n'y a aucune valeur de a pour laquelle $S = \emptyset$. Si $a = 1$, alors $S = \{1\}$.

(b) $3x - a = a(x - 3) + 6$. Cette équation est équivalente à $x(3 - a) = 2(3 - a)$. Si $a = 3$, alors on obtient l'équation $0 = 0$, dans ce cas toute valeur de x vérifie $3x - a = a(x - 3) + 6$, c'est-a-dire $S = \mathbb{R}$. Si $a \neq 3$, alors on peut diviser par $3 - a$ et obtenir l'équation équivalente $x = 2$; dans ce cas $S = \{2\}$. Ainsi il n'y a aucune valeur de a pour laquelle $S = \emptyset$ ou $S = \{1\}$.

(c) $mx - m(2x - 1) = (1 + m)x + 3m + 1$. Cette équation est équivalente à $-(2m + 1) = x(2m + 1)$. Si $m = -1/2$, alors $0 = 0$, dans ce cas toute valeur de x vérifie l'équation, c'est-a-dire $S = \mathbb{R}$. Si $m \neq -1/2$, alors comme ci-dessus, on divise pour obtenir $x = -1$, et dans ce cas $S = \{-1\}$. Il n'y a aucune valeur de m pour laquelle $S = \emptyset$ ou $S = \{1\}$.

(d) $nx + n + 1 = 2x + n$. Cette équation est équivalente à $(n - 2)x + 1 = 0$. Lorsque $n = 2$, $S = \emptyset$ puisque l'équation $1 = 0$ n'a aucune solution. Sinon, on peut diviser par $n - 2$ et obtenir $x = -\frac{1}{n-2}$. Lorsque $n = 1$, on trouve $x = 1$ si bien que $S = \{1\}$. Il n'y a aucune valeur de n pour laquelle $S = \mathbb{R}$.

Exercice 5

Equations du second degré.

1. Comme rappelé dans l'énoncé l'équation $(x - 2)(x + 3) = 0$ admet pour solutions celles de $x - 2 = 0$ et celles de $x + 3 = 0$. Ainsi $S = \{2, -3\}$.

2. Puisque $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ nous cherchons des nombres a et b tels que $ab = 3$ et $a+b = 4$. On peut donc factoriser $x^2+4x+3 = (x+1)(x+3)$. Par conséquent les solutions de cette équation sont $S = \{-1, -3\}$.
3. L'équation $x^2+2bx+c = 0$ est donnée sous forme réduite et ordonnée, alors que $(x+b)^2 = b^2-c$ ne l'est pas. Pour montrer que ces équations sont équivalentes nous devons donc d'abord réduire et ordonner la seconde.
   Comme $(x+b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$, on voit en ajoutant $c - b^2$ de part et d'autre de l'égalité $(x+b)^2 = b^2 - c$ qu'il s'agit bien de la "même" équation.
4. Pour résoudre l'équation $x^2+2bx+c = 0$ nous utilisons la forme équivalente $(x+b)^2 = b^2 - c$. Celle-ci nous permet en effet de comprendre que

$$x + b = \pm\sqrt{b^2 - c} \iff x = -b \pm \sqrt{b^2 - c}$$

   Nous devons faire très attention au terme qui se trouve sous la racine ! En effet si $b^2 - c < 0$, la racine n'existe pas. De fait, si $\Delta = b^2 - c$ est strictement négatif, l'équation $(x+b)^2 = b^2 - c$ n'admet aucune solution (le terme de gauche est un carré, donc positif, celui de droite est strictement négatif).
   Si $\Delta = b^2 - c \geq 0$, la formule ci-dessus a un sens et l'équation admet toujours au moins une solution. Quand y a-t-il une seule solution ? Lorsque $b^2 = c$ puisque dans ce cas

$$-b + \sqrt{b^2 - c} = -b = -b - \sqrt{b^2 - c}.$$

   Sinon, lorsque $b^2 > c$, l'équation a exactement deux solutions. Nous retrouverons ces acteurs (équations du second degré, le discriminant Δ, etc.) l'année prochaine !

Exercice 6

a) L'ensemble de définition de f, noté D_f, est $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ et celui de g noté D_g est $D_g = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}, 2\right\}$.

b) L'ensemble de définition de l'équation, noté D, est $D = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}, 2\right\}$.

c) & d) Soit $x \in D$

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x-2} = \frac{7}{4x+6} + \frac{2}{x-2} &\iff \frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-2} = \frac{7}{4x+6} \\
&\iff \frac{1}{x-2} = \frac{7}{4x+6} \\
&\iff 4x+6 = 7(x-2) \\
&\iff 6 + 14 = 7x - 4x \\
&\iff 20 = 3x \\
&\iff x = \frac{20}{3}.
\end{aligned}$$

D'où $S = \left\{\frac{20}{3}\right\}$.

Exercice 7

Pour chaque équation, nous dénotons la fonction du côté gauche par f, la fonction du côté droit par g et l'ensemble de définition de l'équation par D.

1) a) $D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{-5\}$.

b) $D = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-3, -5\}$.

c) & d) Soit $x \in D$, alors

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{x+3} = \frac{x-4}{x+5} &\iff (x-2)(x+5) = (x-4)(x+3) \\ &\iff x^2 + 3x - 10 = x^2 - x - 12 \\ &\iff 4x = -2 \\ &\iff x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

D'où $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

2) a) $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$.

b) $D = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{0, -1\}$.

c) & d) Soit $x \in D$, alors

$$\begin{aligned} \frac{3}{x} = \frac{5}{x+1} &\iff 3(x+1) = 5x \\ &\iff 3x + 3 = 5x \\ &\iff 3 = 2x \\ &\iff x = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

D'où $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

3) a) $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

b) $D = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

c) & d) Soit $x \in D$, alors

$$\begin{aligned} \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} = \frac{6}{(x-1)(x+1)} &\iff 3(x-1) - 2(x+1) = 6 \\ &\iff 3x - 3 - 2x - 2 = 6 \\ &\iff x = 6 + 5 \\ &\iff x = 11. \end{aligned}$$

D'où $S = \{11\}$.

4) a) $D_f = \mathbb{R} - \{0, 2\}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$.

b) $D = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{0, 2\}$.

c) & d) Soit $x \in D$, alors

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-2} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x+1}{x} &\iff x^2 - 4 = (x+1)(x-2) \\ &\iff x^2 - 4 = x^2 - x - 2 \\ &\iff x = -2 + 4 \\ &\iff x = 2. \end{aligned}$$

D'où $S = \emptyset$, comme 2 n'appartient pas à l'ensemble de définition D.

5) a) $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

b) $D = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

c) & d) Soit $x \in D$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{2x-1}{2} = \frac{8x-1}{4x+2} \quad &\iff \quad (2x-1)(4x+2) = (8x-1)2 \\
&\iff \quad 8x^2 - 2 = 16x - 2 \\
&\iff \quad 8x^2 - 16x = 0 \\
&\iff \quad x^2 - 2x = 0 \\
&\iff \quad x(x-2) = 0.
\end{aligned}$$

D'où $S = \{0, 2\}$.

6) a) $D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

b) $D = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

c) & d) Soit $x \in D$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x+3} = \frac{6x}{x^2-9} - \frac{3}{x-3} \quad &\iff \quad x(x-3) = 6x - 3(x+3) \\
&\iff \quad x^2 - 3x = 3x - 9 \\
&\iff \quad x^2 - 6x + 9 = 0 \\
&\iff \quad (x-3)^2 = 0 \\
&\iff \quad x = 3.
\end{aligned}$$

D'où $S = \emptyset$ puisque 3 n'est pas dans l'ensemble de définition.

7) a) $D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$.

b) $D = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

c) & d) Soit $y \in D$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{2}{y^2-y} - \frac{2}{y-1} = \frac{y-1}{y} \quad &\iff \quad 2 - 2y = (y-1)(y-1) \\
&\iff \quad -2(y-1) = (y-1)^2 \\
&\iff \quad -2 = y - 1 \\
&\iff \quad -1 = y.
\end{aligned}$$

D'où $S = \{-1\}$.

8) a) Notons que $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Donc $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$.

b) $D = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{1\}$.

c) & d) Soit $x \in D$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{x+5}{x-1} + \frac{8}{(x-1)^2} = \frac{4(x+1)}{x^2-2x+1} \quad &\iff \quad (x+5)(x-1) + 8 = 4(x+1) \\
&\iff \quad x^2 + 4x - 5 + 8 = 4x + 4 \\
&\iff \quad x^2 = 1 \\
&\iff \quad x = 1 \text{ ou } x = -1.
\end{aligned}$$

D'où $S = \{-1\}$, comme 1 n'appartient pas à D.

Exercice 8

Equations et graphes.

1. La pente de cette droite sera égale à zéro puisqu'elle est parallèle à la droite $y = 0$. Ainsi elle sera de la forme $y = h$. Puisque le point $(1; 2)$ appartient à la droite l'équation est $y = 2$.

2. Une droite parallèle à la droite $y = -\frac{1}{2}x+2$ a la même pente. L'équation de la droite cherchée est donc de la forme $y = -\frac{1}{2}x + h$. Puisque le point $(2; 1)$ appartient à cette droite les coordonnées de ce point doivent vérifier l'équation :
$$1 = -\frac{1}{2}2 + h = -1 + h.$$
Ainsi $h = 2$. La droite cherchée est donc celle d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 2$. Vraiment ? C'est la droite à laquelle elle doit être parallèle ! Le point $(1; 2)$ appartient à cette droite, si bien que la droite cherchée n'existe pas !

3. Une droite perpendiculaire à la droite $y = -\frac{1}{2}x + 2$ de pente $-1/2$ doit avoir une pente égale à 2. La droite cherchée est de la forme $y = 2x + h$. Elle passe par le point $(2; -3)$ si bien que
$$-3 = 2 \cdot 2 + h = 4 + h.$$
Ainsi $h = -7$. L'équation cherchée est $y = 2x - 7$.

4. On cherche d'abord le milieu du segment d'extrémités $(-2; 3)$ et $(1; -2)$. Ses coordonnées sont les milieux des coordonnées de ces deux points par proportionnalité. Ce point est donc $(-1/2; 1/2)$. La droite cherchée a pour équation $y = -\frac{1}{2}x+h$. Le point $(-1/2; 1/2)$ vérifie cette équation et on calcule $h = \frac{1}{4}$. L'équation cherchée est $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

5. On considère les fonctions réelles $f(x) = m$ et $g(x) = 1$. Lorsque $m = 1$ les fonctions sont égales, les graphes sont donc confondus. Sinon ils sont parallèles, tous deux correspondent à des droites de pente 0.

6. On considère les fonctions réelles $f(x) = mx$ et $g(x) = m + 1$. Le graphe de g est une droite de pente 0. C'est le cas de f seulement si $m = 0$. Dans ce cas les droites sont parallèles. Sinon la droite $y = mx$ coupe la droite horizontale $y = m + 1$.

7. On considère les fonctions réelles $f(x) = mx - 1$ et $g(x) = x + \sqrt{2}$. Le graphe de g est une droite de pente 1. Ce n'est le cas de f que si $m = 1$. Dans ce cas les droites sont parallèles. Sinon les droites se coupent.

8. On considère les fonctions réelles $f(x) = 2mx + 3$ et $g(x) = 6m + x$. Le graphe de g est une droite de pente 1. Ce n'est le cas de f que si $m = 1/2$. Dans ce cas les droites sont confondues. Sinon les droites se coupent.

Exercice 9

Il y a ici plus d'inconnues que d'équations et pourtant on arrive à résoudre le problème. En effet si x est la hauteur du chat, y celle de la table et z celle de la tortue, alors la première image nous dit que $y - z + x = 170$, alors que la deuxième nous apprend que $z + y - x = 130$.
En additionnant les deux équations on obtient $2y = 300$, la table mesure donc $y = 150$ cm.

Exercice 10

Rappels sur le produit cartésien.

a) 1. La paire (Londres, France) appartient à $X \times Y$.
   2. La paire (Londres, Paris) n'appartient pas à $X \times Y$ car Paris n'est pas un pays.
   3. La paire (Italie, Paris) n'appartient pas à $X \times Y$ car l'Italie n'est pas une ville européenne.
   4. La paire (Genève, Espagne) appartient à $X \times Y$.
   5. La paire (Tokyo, Japon) n'appartient pas à $X \times Y$ car Tokyo n'est pas une ville européenne.
   6. La paire (Suède, Rome) n'appartient pas à $X \times Y$ car La Suède n'est pas une ville européenne, et Rome n'est pas un pays.
   7. La paire (Luxembourg, Luxembourg) appartient à $X \times Y$. Le luxembourg est en même temps une ville européenne et un pays !

b) (a) $(6, -3)$: oui
   (b) $(-6, -3)$: non, car $-6 \notin \mathbb{N}$
   (c) $(0, 4.5)$: oui
   (d) $(2.8, 2.8)$: non car $2.8 \notin \mathbb{N}$
   (e) $\left(0, -\frac{3}{6}\right)$: oui
   (f) $\left(0, \frac{3}{4.6}\right)$: oui
   (g) $\left(1234, \sqrt{2}\right)$: non car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
   (h) $(1, 1)$: oui
   (i) $\left(\frac{48}{6}, -8.429\overline{89}\right)$: oui. En effet, il faut remarquer que $\frac{48}{6} = 8 \in \mathbb{N}$ et $8,429\overline{89} \in \mathbb{Q}$ car un nombre réel à développement décimal périodique est rationnel.

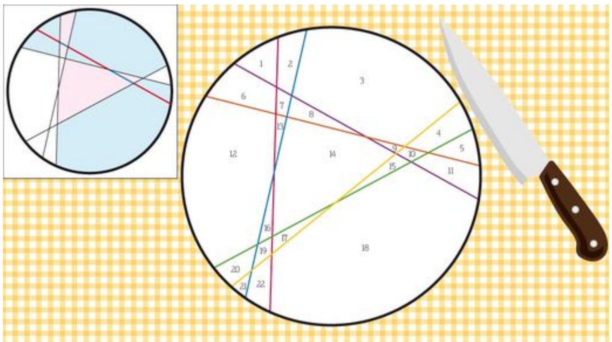
c) Avant de commencer cet exercice, rappelons que l'égalité $(a, b) = (c, d)$ est vérifiée si et seulement si les deux égalités $a = c$ et $b = d$ sont vérifiées, où $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.
   1. $(3r, 5s) = (-9, 10)$ est vérifiée pour $r = -3$ et $s = 2$.
   2. $(r^2, -s) = \left(16, \frac{4}{9}\right)$ est vérifiée lorsque $r = 4$ ou $r = -4$ et $s = -\frac{4}{9}$.
   3. $(r^2, r) = (r, r)$ est vérifié si et seulement si $r^2 = r$ si et seulement si $r = 0$ ou $r = 1$.
   4. $(r, s) = (s, r)$ est vérifié pour tous nombre rationnels r et s tels que $r = s$.
   5. $(r, 5) = (s, -8)$ n'est jamais vérifié car $5 \neq -8$. Pour mieux s'en convaincre, on ne peut jamais trouver de nombres rationnels r, s tels que $5 = -8$.
   6. $(r, 5) = (-r, 5)$ est vérifiée si et seulement si $r = -r$ si et seulement si $r = 0$.
   7. $(r, s) = \left(\sqrt{2}, s\right)$ n'est jamais vérifiée car $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, donc on ne pas trouver de **rationnel** r tel que $r = \sqrt{2}$.
   8. $(r + s, r - s) = (3, 2)$ est vérifié pour $r = \frac{5}{2}$ et $s = \frac{1}{2}$.
      Preuve. L'égalité donnée impose $r - s = 2$, ce qui est équivalent à $r = s + 2$. De plus, l'égalité $r + s = 3$ est aussi imposée. Puisque $r = s + 2$, remplaçons r par $s + 2$ dans cette égalité. On obtient :

$$r + s = s + 2 + s = 2s + 2 = 3.$$

Cette équation est équivalente à
$$2s = 1.$$
Donc
$$s = \frac{1}{2}.$$
On a donc trouvé la valeur de s ! Remplaçons donc $s = \frac{1}{2}$ dans l'égalité $r - s = 2$:
$$r - s = r - \frac{1}{2} = 2$$
donc
$$r = 2 + \frac{1}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}.$$
Nous venons de résoudre un système de deux équations à deux inconnues !

Exercice 11 (Optionnel)

Problème du mois : Mathscope de l'Université de Genève, tiré des casse-tête mathématiques de Sam Loyd. La solution vient du site internet.
On peut faire 22 parts au maximum. Une découpe possible est illustrée ci-dessous.



Essayons d'établir la formule qui, en fonction du nombre de découpes n, donne le nombre maximal de parts $f(n)$.

— Si on ne fait aucune découpe ($n = 0$), on aura une unique part (la tarte entière).
— Si on fait une découpe ($n = 1$), on aura 2 parts.
— Si on fait 2 découpes, on aura 4 parts, pour autant que les 2 découpes s'intersectent à l'intérieur de la tarte.

Cette remarque nous incite à penser que pour obtenir un maximum de parts, la nouvelle découpe devra intersecter toutes les découpes précédentes à l'intérieur du cercle (de la tarte). Ceci implique aussi que les découpes parallèles sont déconseillées. En outre, si plus que deux découpes se croisent en un même point, on perdra aussi quelques parts de tarte.
Supposons qu'on a déjà fait $n-1$ découpes (sur la vignette on a un exemple avec $n = 5$). La nouvelle découpe intersectera les $n - 1$ découpes précédentes partageant ainsi cette découpe en n segments. Chacun de ces n segments partage une part en 2 parts. On ajoute ainsi n parts au partage précédent, autrement dit :
$$f(n) = n + f(n - 1).$$
Si on applique ce raisonnement à $f(n - 1)$ puis à $f(n - 2)$ et ainsi de suite jusqu'à $f(1)$, on obtient

(par récurrence) :

$$\boxed{f(n) = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ + 2 + 1 + f(0)}$$

Comme la somme des nombres de 1 à n vaut $n \cdot (n+1)/2$ et que, comme on l'a vu plus haut, $f(0) = 1$, on obtient la formule :

$$\boxed{f(n) = 1 + \frac{n \cdot (n+1)}{2}}$$

qui donne bien $f(6) = 22$.