Cours Euler: Série 23

6 mars 2024

Exercice 1

Un peu de théorie : Vrai ou faux ? Dans chaque cas explique brièvement pourquoi l'affirmation est vraie ou fausse. Si elle est fausse donne un contre-exemple pour le démontrer ! Lis attentivement la donnée pour bien comprendre la différence entre chaque affirmation.

1) L'équation $ax - \sqrt{2} = 0$ a une unique solution pour toute valeur de $a \in \mathbb{R}$.
2) L'équation $ax - \sqrt{2} = 0$ a une unique solution pour certaines valeurs de $a \in \mathbb{Q}$.
3) L'équation $x - a\sqrt{2} = 0$ a une unique solution pour toute valeur de $a \in \mathbb{R}$.
4) L'équation $x - a\sqrt{2} = 0$ a une unique solution rationnelle pour certaines valeurs de $a \in \mathbb{Q}$.
5) L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a exactement deux solutions pour toutes valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$.
6) L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a exactement deux solutions pour certaines valeurs de $a, b, c \in \mathbb{Q}$.
7) L'équation $x^2 + 2x + c = 0$ n'a aucune solution pour toute valeur $c \geq 10$.

Exercice 2

Un problème de Nicolas Chuquet, 1484. Un marchand participe à 3 foires. A la première il double son argent et dépense 30 pistoles. A la deuxième il triple son argent et dépense 54 pistoles. A la dernière il quadruple son argent puis dépense 72 pistoles. Il lui reste alors 48 pistoles. Combien d'argent avait-il au départ ?
S'il avait eu 2 pistoles de moins, combien d'argent aurait-il finalement ?

Exercice 3 (Optionnel)

Justin Bieber et Miley Cyrus vont au restaurant ensemble et commandent exactement le même menu (ils paient donc la même somme). A eux deux ils ont 100\$. M. Bieber dépense la moitié de son argent et il reste 10\$ à Mlle Cyrus à la fin du repas. Pose les équations qui correspondent à ce problème et calcule combien d'argent Justin Bieber avait en poche avant le repas.

Exercice 4

Equations avec paramètre(s). Dans les équations suivantes, les lettres a, m, n sont des « paramètres », c'est-à-dire des nombres réels *fixés*. Seule la lettre x est une inconnue qu'on cherche à déterminer. Ainsi, chaque choix de paramètre détermine une équation. On te demande de déterminer la ou les valeurs du paramètre pour que l'ensemble des solutions S de l'équation vérifie :

$$\text{i)} S = \mathbb{R}\,; \quad \text{ii)}\ S = \emptyset\,; \quad \text{iii)}\ S = \{1\}.$$

1) $2x - 3(x + a) = 3x - 7a$

2) $3x - a = a(x - 3) + 6$

3) $mx - m(2x - 1) = (1 + m)x + 3m + 1$

4) $nx + n + 1 = 2x + n$

Exercice 5

Equations du second degré. La clé de la résolution des équations du second degré est l'observation suivante. Une équation du type $f(x) \cdot g(x) = 0$ a pour solutions les solutions de l'équation $f(x) = 0$ ET les solutions de l'équation $g(x) = 0$.

1) Résous l'équation $(x - 2)(x + 3) = 0$.
2) Résous l'équation $x^2+4x+3 = 0$. Pour cela je propose d'écrire l'équation sous la forme $(x+a)(x+b)$.
3) Soient b et c des nombres réels. On considère l'équation $x^2+2bx+c = 0$. Montre que cette équation est équivalente à l'équation $(x + b)^2 = b^2 - c$.
4) Soient $b, c \in \mathbb{R}$. Résous l'équation $x^2 + 2bx + c = 0$ en utilisant la partie 3. Trouve en particulier quand cette équation a zéro, une ou deux solutions (en fonctions de b et de c).

Exercice 6

Considère l'équation

$$\boxed{\frac{3}{x-2} = \frac{7}{4x+6} + \frac{2}{x-2}}$$

à valeurs dans $\mathbb{R}$. Posons

$$f(x) = \frac{3}{x-2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{7}{4x+6} + \frac{2}{x-2}.$$

1) Donne les ensembles de définition des fonctions f et g (l'ensemble d'arrivée est chaque fois $\mathbb{R}$).
2) Donne l'ensemble de définition de l'équation (sachant qu'elle prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$).
3) Trouve une équation équivalente dans l'ensemble de définition obtenu qui ne comporte plus de fractions.
4) Résous l'équation dans son ensemble définition.

Exercice 7

Pour les équations 1) à 4), réponds aux questions a) à d) de l'exercice précédent. A partir de l'équation 5), tu vas aboutir à une équation du second degré. La question d) est alors facultative. Si tu veux résoudre les équations à partir de 5), on obtient une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$, puis on factorise le polynôme $ax^2 + bx + c = (mx + n)(px + l)$. On sait alors que les solutions sont $x_1 = \frac{-n}{m}$ et $x_2 = \frac{-l}{p}$ *si x_1 et x_2 appartiennent à l'ensemble de définition*).

1) $\dfrac{x-2}{x+3} = \dfrac{x-4}{x+5}$

2) $\dfrac{3}{x} = \dfrac{5}{x+1}$

3) $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{6}{(x-1)(x+1)}$

4) $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{4}{x(x-2)} = \dfrac{x+1}{x}$

5) $\dfrac{2x-1}{2} = \dfrac{8x-1}{4x+2}$

6) $\dfrac{x}{x+3} = \dfrac{6x}{x^2-9} - \dfrac{3}{x-3}$

7) $\dfrac{2}{y^2-y} - \dfrac{2}{y-1} = \dfrac{y-1}{y}$

8) $\dfrac{x+5}{x-1} + \dfrac{8}{(x-1)^2} = \dfrac{4(x+1)}{x^2-2x+1}$

Exercice 8

Equations et graphes. Il n'est pas nécessaire de dessiner le graphe dans ces exercices. Explique dans chaque cas comment tu utilises la notion de pente pour analyser la situation.

1) Trouve l'équation de la droite qui passe par le point $(1; 2)$ et qui est parallèle à l'axe des x. On demande une équation de la forme $y = mx + h$ qui décrit l'ordonnée y des points de cette droite en fonction de leur abscisse x.
2) Trouve l'équation de la droite qui passe par $(2; 1)$ et qui est parallèle à $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$.
3) Trouve l'équation de la droite qui passe par $(2; -3)$ et qui est perpendiculaire à $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$.
4) Trouve l'équation de la droite qui passe par le milieu du segment d'extrémités $(-2; 3)$ et $(1; -2)$ et qui est parallèle à la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x + 2$.
5) Soit m un paramètre réel (c'est-à-dire un nombre réel m, pas une inconnue !). On considère les fonctions réelles $f(x) = m$ et $g(x) = 1$. Pour quelles valeurs du paramètre m les graphes de ces fonctions sont-ils parallèles ? confondus ? concourants (ils se coupent en un point) ?
6) Soit m un paramètre réel (c'est-à-dire un nombre réel m, pas une inconnue !). On considère les fonctions réelles $f(x) = mx$ et $g(x) = m + 1$. Pour quelles valeurs du paramètre m les graphes de ces fonctions sont-ils parallèles ? confondus ? concourants (ils se coupent en un point) ?
7) Soit m un paramètre réel (c'est-à-dire un nombre réel m, pas une inconnue !). On considère les fonctions réelles $f(x) = mx - 1$ et $g(x) = x + \sqrt{2}$. Pour quelles valeurs du paramètre m les graphes de ces fonctions sont-ils parallèles ? confondus ? concourants ?
8) Soit m un paramètre réel (c'est-à-dire un nombre réel m, pas une inconnue !). On considère les fonctions réelles $f(x) = 2mx + 3$ et $g(x) = 6m + x$. Pour quelles valeurs du paramètre m les graphes de ces fonctions sont-ils parallèles ? confondus ? concourants ?

Exercice 9

Quelle est la hauteur de la table ?

Exercice 10

Rappels sur le produit cartésien. Avant de te lancer dans l'exercice, relis attentivement la définition de produit cartésien.

1) Soient $X = \{\text{villes européennes}\}$ et $Y = \{\text{pays}\}$. Parmi les paires ordonnées suivantes, lesquelles appartiennent à $X \times Y$? Si une paire n'y appartient pas, explique pourquoi.

   a) (Londres, France)
   b) (Londres, Paris)
   c) (Italie, Paris)
   d) (Genève, Espagne)
   e) (Tokyo, Japon)
   f) (Suède, Rome)
   g) (Luxembourg, Luxembourg).

2) Parmi les paires ordonnées de $\mathbb{R}^2$ suivantes, lesquelles appartiennent à $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$? Si une paire n'y appartient pas, explique pourquoi.

   a) $(6, -3)$
   b) $(-6, -3)$
   c) $(0, 4.5)$
   d) $(2.8, 2.8)$
   e) $\left(0, -\frac{3}{6}\right)$
   f) $\left(0, \frac{3}{4.6}\right)$
   g) $\left(1234, \sqrt{2}\right)$
   h) $(1, 1)$
   i) $\left(\frac{48}{6}, -8.429\overline{89}\right)$

3) Détermine le nombre $r \in \mathbb{Q}$ (et le nombre $s \in \mathbb{Q}$ s'il apparaît) tel que l'égalité soit vérifiée (il peut y avoir zéro, une ou plusieurs solutions). Justifie ta réponse par un raisonnement ou un calcul.

   a) $(3r, 5s) = (-9, 10)$
   b) $(r^2, -s) = \left(16, \frac{4}{9}\right)$
   c) $(r^2, r) = (r, r)$
   d) $(r, s) = (s, r)$
   e) $(r, 5) = (s, -8)$
   f) $(r, 5) = (-r, 5)$
   g) $(r, s) = \left(\sqrt{2}, s\right)$
   h) (difficile) $(r + s, r - s) = (3, 2)$

Exercice 11 (Optionnel)

Problème du mois (mars 2016) : Mathscope de l'Université de Genève, tiré des casse-tête mathématiques de Sam Loyd. Tante Marie, propriétaire d'une pension de famille, a demandé à son chef de montrer à ses pensionnaires comment diviser une tarte en un nombre maximum de morceaux, avec six coups de couteau rectilignes. Quel est votre point de vue quant à ce nombre ?