

Cours Euler: Série 23

26 février 2025

Exercice 1

Un peu de théorie : Vrai ou faux ? Dans chaque cas explique brièvement pourquoi l'affirmation est vraie ou fausse. Si elle est fausse donne un contre-exemple pour le démontrer ! Lis attentivement la donnée pour bien comprendre la différence entre chaque affirmation.

- 1) L'équation $ax - \sqrt{2} = 0$ a une unique solution pour toute valeur de $a \in \mathbb{R}$.
- 2) L'équation $ax - \sqrt{2} = 0$ a une unique solution pour certaines valeurs de $a \in \mathbb{Q}$.
- 3) L'équation $x - a\sqrt{2} = 0$ a une unique solution pour toute valeur de $a \in \mathbb{R}$.
- 4) L'équation $x - a\sqrt{2} = 0$ a une unique solution rationnelle pour certaines valeurs de $a \in \mathbb{Q}$.
- 5) L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a exactement deux solutions pour toutes valeurs de $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- 6) L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a exactement deux solutions pour certaines valeurs de $a, b, c \in \mathbb{Q}$.
- 7) L'équation $x^2 + 2x + c = 0$ n'a aucune solution pour toute valeur $c \geq 10$.

Exercice 2

Un problème de Nicolas Chuquet, 1484. Un marchand participe à 3 foires. A la première il double son argent et dépense 30 pistoles. A la deuxième il triple son argent et dépense 54 pistoles. A la dernière il quadruple son argent puis dépense 72 pistoles. Il lui reste alors 48 pistoles. Combien d'argent avait-il au départ ?

S'il avait eu 2 pistoles de moins, combien d'argent aurait-il finalement ?

Exercice 3 (Optionnel)

Justin Bieber et Miley Cyrus vont au restaurant ensemble et commandent exactement le même menu (ils paient donc la même somme). A eux deux ils ont 100\$. M. Bieber dépense la moitié de son argent et il reste 10\$ à Mlle Cyrus à la fin du repas. Pose les équations qui correspondent à ce problème et calcule combien d'argent Justin Bieber avait en poche avant le repas.

Exercice 4

Equations avec paramètre(s). Dans les équations suivantes, les lettres a, m, n sont des « paramètres », c'est-à-dire des nombres réels *fixés*. Seule la lettre x est une inconnue qu'on cherche à déterminer. Ainsi, chaque choix de paramètre détermine une équation. On te demande de déterminer la ou les valeurs du paramètre pour que l'ensemble des solutions S de l'équation vérifie :

$$\text{i) } S = \mathbb{R}; \quad \text{ii) } S = \emptyset; \quad \text{iii) } S = \{1\}.$$

$$1) \quad 2x - 3(x + a) = 3x - 7a$$

$$3) \quad mx - m(2x - 1) = (1 + m)x + 3m + 1$$

$$2) \quad 3x - a = a(x - 3) + 6$$

$$4) \quad nx + n + 1 = 2x + n$$

Exercice 5

Equations du second degré. La clé de la résolution des équations du second degré est l'observation suivante. Une équation du type $f(x) \cdot g(x) = 0$ a pour solutions les solutions de l'équation $f(x) = 0$ ET les solutions de l'équation $g(x) = 0$.

$$1) \quad \text{Résous l'équation } (x - 2)(x + 3) = 0.$$

$$2) \quad \text{Résous l'équation } x^2 + 4x + 3 = 0. \text{ Pour cela je propose d'écrire l'équation sous la forme } (x+a)(x+b).$$

$$3) \quad \text{Soient } b \text{ et } c \text{ des nombres réels. On considère l'équation } x^2 + 2bx + c = 0. \text{ Montre que cette équation est équivalente à l'équation } (x + b)^2 = b^2 - c.$$

$$4) \quad \text{Soient } b, c \in \mathbb{R}. \text{ Résous l'équation } x^2 + 2bx + c = 0 \text{ en utilisant la partie 3. Trouve en particulier quand cette équation a zéro, une ou deux solutions (en fonctions de } b \text{ et de } c).$$

Exercice 6

Considère l'équation

$$\boxed{\frac{3}{x-2} = \frac{7}{4x+6} + \frac{2}{x-2}}$$

à valeurs dans \mathbb{R} . Posons

$$f(x) = \frac{3}{x-2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{7}{4x+6} + \frac{2}{x-2}.$$

$$1) \quad \text{Donne les ensembles de définition des fonctions } f \text{ et } g \text{ (l'ensemble d'arrivée est chaque fois } \mathbb{R}).$$

$$2) \quad \text{Donne l'ensemble de définition de l'équation (sachant qu'elle prend ses valeurs dans } \mathbb{R}).$$

$$3) \quad \text{Trouve une équation équivalente dans l'ensemble de définition obtenu qui ne comporte plus de fractions.}$$

$$4) \quad \text{Résous l'équation dans son ensemble définition.}$$

Exercice 7

Pour les équations 1) à 4), réponds aux questions a) à d) de l'exercice précédent. A partir de l'équation 5), tu vas aboutir à une équation du second degré. La question d) est alors facultative. Si tu veux résoudre les équations à partir de 5), on obtient une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$, puis on factorise le polynôme $ax^2 + bx + c = (mx + n)(px + l)$. On sait alors que les solutions sont $x_1 = \frac{-n}{m}$ et $x_2 = \frac{-l}{p}$ si x_1 et x_2 appartiennent à l'ensemble de définition).

1) $\frac{x-2}{x+3} = \frac{x-4}{x+5}$

2) $\frac{3}{x} = \frac{5}{x+1}$

3) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} = \frac{6}{(x-1)(x+1)}$

4) $\frac{x}{x-2} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x+1}{x}$

5) $\frac{2x-1}{2} = \frac{8x-1}{4x+2}$

6) $\frac{x}{x+3} = \frac{6x}{x^2-9} - \frac{3}{x-3}$

7) $\frac{2}{y^2-y} - \frac{2}{y-1} = \frac{y-1}{y}$

8) $\frac{x+5}{x-1} + \frac{8}{(x-1)^2} = \frac{4(x+1)}{x^2-2x+1}$

Exercice 8

Equations et graphes. Il n'est pas nécessaire de dessiner le graphe dans ces exercices. Explique dans chaque cas comment tu utilises la notion de pente pour analyser la situation.

- 1) Trouve l'équation de la droite qui passe par le point $(1; 2)$ et qui est parallèle à l'axe des x . On demande une équation de la forme $y = mx + h$ qui décrit l'ordonnée y des points de cette droite en fonction de leur abscisse x .
- 2) Trouve l'équation de la droite qui passe par $(2; 1)$ et qui est parallèle à $y = -\frac{1}{2}x + 2$.
- 3) Trouve l'équation de la droite qui passe par $(2; -3)$ et qui est perpendiculaire à $y = -\frac{1}{2}x + 2$.
- 4) Trouve l'équation de la droite qui passe par le milieu du segment d'extrémités $(-2; 3)$ et $(1; -2)$ et qui est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 2$.
- 5) Soit m un paramètre réel (c'est-à-dire un nombre réel m , pas une inconnue!). On considère les fonctions réelles $f(x) = m$ et $g(x) = 1$. Pour quelles valeurs du paramètre m les graphes de ces fonctions sont-ils parallèles? confondus? concourants (ils se coupent en un point)?
- 6) Soit m un paramètre réel (c'est-à-dire un nombre réel m , pas une inconnue!). On considère les fonctions réelles $f(x) = mx$ et $g(x) = m + 1$. Pour quelles valeurs du paramètre m les graphes de ces fonctions sont-ils parallèles? confondus? concourants (ils se coupent en un point)?
- 7) Soit m un paramètre réel (c'est-à-dire un nombre réel m , pas une inconnue!). On considère les fonctions réelles $f(x) = mx - 1$ et $g(x) = x + \sqrt{2}$. Pour quelles valeurs du paramètre m les graphes de ces fonctions sont-ils parallèles? confondus? concourants?
- 8) Soit m un paramètre réel (c'est-à-dire un nombre réel m , pas une inconnue!). On considère les fonctions réelles $f(x) = 2mx + 3$ et $g(x) = 6m + x$. Pour quelles valeurs du paramètre m les graphes de ces fonctions sont-ils parallèles? confondus? concourants?

Exercice 9

Quelle est la hauteur de la table?



Exercice 10

Rappels sur le produit cartésien. Avant de te lancer dans l'exercice, relis attentivement la définition de produit cartésien.

1) Soient $X = \{\text{villes européennes}\}$ et $Y = \{\text{pays}\}$. Parmi les paires ordonnées suivantes, lesquelles appartiennent à $X \times Y$? Si une paire n'y appartient pas, explique pourquoi.

- | | | |
|----------------------|----------------------|------------------------------|
| a) (Londres, France) | d) (Genève, Espagne) | g) (Luxembourg, Luxembourg). |
| b) (Londres, Paris) | e) (Tokyo, Japon) | |
| c) (Italie, Paris) | f) (Suède, Rome) | |

2) Parmi les paires ordonnées de \mathbb{R}^2 suivantes, lesquelles appartiennent à $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$? Si une paire n'y appartient pas, explique pourquoi.

- | | | |
|---------------|-------------------------|--|
| a) $(6, -3)$ | d) $(2.8, 2.8)$ | g) $(1234, \sqrt{2})$ |
| b) $(-6, -3)$ | e) $(0, -\frac{3}{6})$ | h) $(1, 1)$ |
| c) $(0, 4.5)$ | f) $(0, \frac{3}{4.6})$ | i) $(\frac{48}{6}, -8.429\overline{89})$ |

3) Détermine le nombre $r \in \mathbb{Q}$ (et le nombre $s \in \mathbb{Q}$ s'il apparaît) tel que l'égalité soit vérifiée (il peut y avoir zéro, une ou plusieurs solutions). Justifie ta réponse par un raisonnement ou un calcul.

- | | | |
|------------------------------------|-----------------------|-----------------------------------|
| a) $(3r, 5s) = (-9, 10)$ | d) $(r, s) = (s, r)$ | g) $(r, s) = (\sqrt{2}, s)$ |
| b) $(r^2, -s) = (16, \frac{4}{9})$ | e) $(r, 5) = (s, -8)$ | h) (difficile) $(r + s, r - s) =$ |
| c) $(r^2, r) = (r, r)$ | f) $(r, 5) = (-r, 5)$ | $(3, 2)$ |

Exercice 11 (Optionnel)

Problème du mois (mars 2016) : Mathscope de l'Université de Genève, tiré des casse-tête mathématiques de Sam Loyd. Tante Marie, propriétaire d'une pension de famille, a demandé à son chef de montrer à ses pensionnaires comment diviser une tarte en un nombre maximum de morceaux, avec six coups de couteau rectilignes. Quel est votre point de vue quant à ce nombre?