Cours Euler: Corrigé 22

11 février 2026

Exercice 1

Une équation historique ! Soit x le montant total de l'héritage, en livres. Le premier fils reçoit $x/2 - 3000$. Le second reçoit $x/3 - 1000$, le troisième $x/4$ et le dernier $x/5 + 600$.
On sait donc que
$$x = \frac{x}{2} - 3000 + \frac{x}{3} - 1000 + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 600$$
On arrange les termes et met au même dénominateur les monômes en x :
$$x = \frac{30x + 20x + 15x + 12x}{60} - 3400 = \frac{77x}{60} - 3400$$
Autrement dit, en soustrayant x de part et d'autre et en ajoutant 3400 de part et d'autre
$$3400 = \frac{17x}{60}$$
On multiplie le tout par 60 et on trouve $17x = 3400 \cdot 60 = 204'000$. On divise le tout par 17 et on trouve $x = 12'000$. L'héritage était de $12'000$ livres. Chaque fils reçoit exactement la même somme, c'est-à-dire 3000 livres !

Exercice 2

Un peu de théorie.

1) Supposons que r soit solution de l'équation $f(x) = g(x)$ définie sur X et que h soit une fonction définie sur X. Alors
$$f(r) = g(r) \Rightarrow f(r) \cdot h(r) = g(r) \cdot h(r).$$

2) Inversement, supposons que r soit solution de l'équation $f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$ où f, g, h sont définies sur X et $h(x) \neq 0$ sur X. Alors
$$\begin{aligned} f(r) \cdot h(r) = g(r) \cdot h(r) &\Rightarrow (f(r) \cdot h(r)) \cdot \frac{1}{h(r)} = (g(r) \cdot h(r)) \cdot \frac{1}{h(r)}. \\ &\Rightarrow f(r) \cdot \left(h(r) \cdot \frac{1}{h(r)}\right) = g(r) \cdot \left(h(r)) \cdot \frac{1}{h(r)}\right). \\ &\Rightarrow f(r) = h(r). \end{aligned}$$

Exercice 3

1) (a) Dans $E = \{1; -1; 5; -6\}$ les nombres 1 et -1 sont solutions.
   (b) Dans $F = \{3; 1; 0; -5\}$ seul 1 est solution.
   (c) Dans $G = \{2; 7; 3; -12\}$ il n'y a pas de solution, $S = \emptyset$.
   (d) Dans $H = \mathbb{R}$, il y a deux solutions, 1 et -1. En effet, $x^2 - 1 = 0$ si et seulement si $x^2 = 1$. Il n'y a que deux nombres réels dont le carré vaut 1.

2) Dans E, les solutions sont 3 et -2. Dans F, les solutions sont 1 et 3. Dans G les solutions sont 3, 1 et -2. Dans $E \cap F = \{5; 3\}$ la seule solution est 3.

   En fait on peut résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$ en se rendant compte que l'on peut mettre en évidence $(x - 1)$ dans le polynôme du troisième degré :

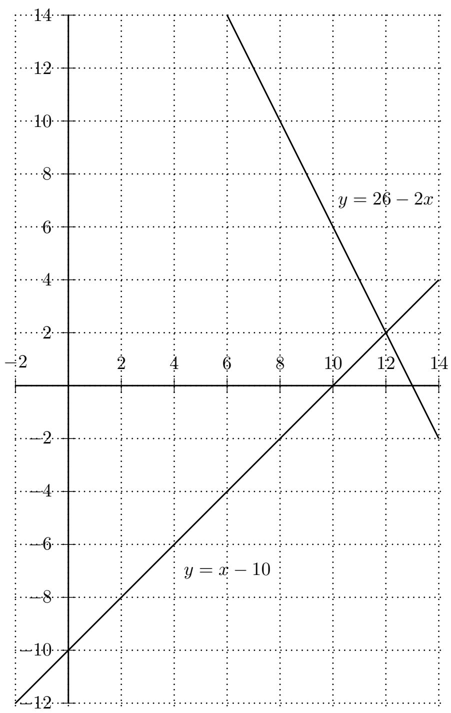
$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^2 - x - 6) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$$

   Un produit de trois nombres ne vaut zéro que si l'un des trois est nul. Ainsi il faut que $x - 1 = 0$ OU $x - 3 = 0$ OU $x + 2 = 0$. Il y a trois solutions dans $\mathbb{R}$. La résolution de telles équations sera le sujet d'un chapitre de l'année prochaine !

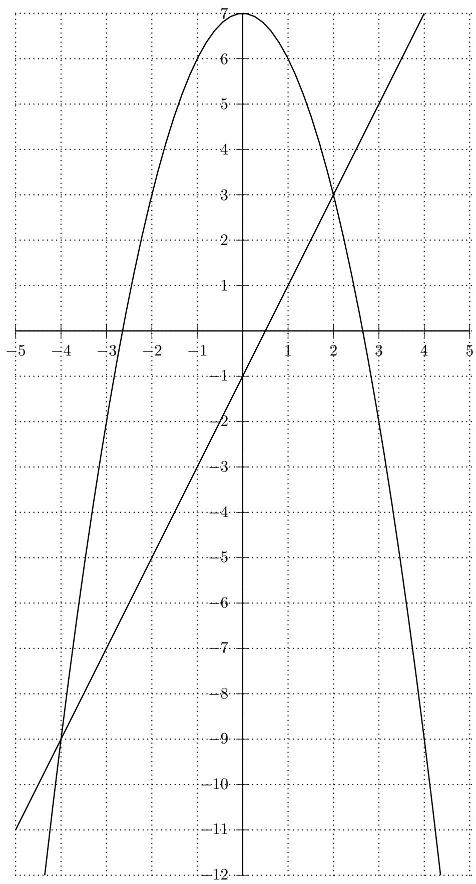
Exercice 4

Résolution graphique.

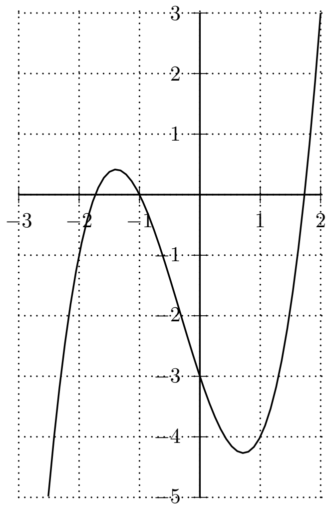
1) Les deux droites se coupent en $x = 12$:



2) Les graphes se coupent en $x = -4$ et $x = 2$:



3) Les solutions de l'équation au centième près sont $-1,00$, $1,73$ et $-1,73$. Le graphique obtenu devrait ressembler à



Exercice 5

Equations équivalentes I.

1) $3x - 2x = 9$ donc $3x - 2x = 9 \iff x = 9$.

2) $5(x+4) - 4x - 20 = 5x + 20 - 4x - 20 = x$ et $2(x-5) - 2x = -10$ donc $x = -10$

3) $(1-x) - (1-2x) = 1 - x - 1 + 2x = x$ donc $(1-x) - (1-2x) = 3 \iff x = 3$

4) $11x - (x + 2x + 3x + 4x) = 11x - 10x = x$ et $6(3x+2) - 2(9x-5) = 18x + 12 - 18x + 10 = 22$ donc $11x - (x + 2x + 3x + 4x) = 6(3x+2) - 2(9x-5) \iff x = 22$

5) De la même façon on arrive ici à l'équation $0 = 22$. Il n'y a pas de solution !

6) $3\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}x + \frac{7}{6}x\right) = 3\left(\frac{4x-9x+7x}{6}\right) = \frac{2x}{2} = x$ donc $3\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}x + \frac{7}{6}x\right) = 8 \iff x = 8$

Exercice 6

Equations équivalentes II.

1) oui : $5 + 2x + 3x - 12 - 4x + 7 = x + 12 - 12 = x$ donc $5 + 2x + 3x - 12 - 4x + 7 = 8 \iff x = 8$.

2) non : $15x - (7x+8) = 8x - 8 = 3x + 2 \iff 8x - 8 = 3x + 2 \overset{(ii)}{\iff} 5x = 10 \overset{(iii)}{\iff} x = 2$ (première équation)

   $3x + 10 - (8 - 5x) = 8x + 2$ et $3(x+3) - 7 = 3x + 2$ donc $5x = 0$ donc par (iii), $x = 0$ (seconde équation)

3) oui : $\frac{x}{2} + \frac{5x}{3} = \frac{3x+10x}{6} = \frac{13x}{6} = 5 + 2x$ donc par (iii), $13x = 30 + 12x$ c'est-à-dire par (ii), $x = 30$ (première équation)

   $\frac{13x}{6} = \frac{10}{2} + \frac{5x}{3} - \frac{2x}{3} + x = \frac{30+10x-4x+6x}{6} = \frac{12x+30}{6}$ donc par (iii), $13x = 12x + 30$ donc par (ii), $x = 30$ (seconde équation)

4) oui : $(x-2)(x+2) = x^2 - 4 = x + 1$ (première équation)

   $x^2 - 7 + 3 = x^2 - 4$ et $5(x+1) - 4x - 4 = x + 1$ donc $x^2 - 4 = x + 1$ (seconde équation)

5) oui : $x^2 + 4x + 4 = 5x + 2 \iff x^2 - x + 2 = 0$. Cette équation n'a pas de solution.

   $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ et $12x + 1 - 7(x+2) + 15 = 5x + 15 - 14 = 5x + 1$. Donc l'équation est équivalente à $x^2 + 4x + 4 = 5x + 1 \iff x^2 - x + 3 = 0$. Cette équation n'a pas de solution. Donc elle est équivalente à la première.

   Pour le voir par opération élémentaire, noter que les membres de gauche des deux équations ne s'annulent pas sur l'ED de l'équation. On obtient donc une équation équivalente en divisant par le membre de gauche :

   $x^2 - x + 2 = 0 \iff 1 = 0$ et pour la deuxième : $x^2 - x + 3 = 0 \iff 1 = 0$.

   On obtient donc la même équation via des opérations élémentaires. On en conclut à nouveau qu'elles sont équivalentes.

6) oui : $(x-5)(x-4) = x^2 - 9x + 20 = 6$ (première équation)

   $(x-3)(x-6) + 2 = x^2 - 9x + 20 = 6$ (seconde équation)

Exercice 7 (Optionnel)

1) Puisque 1.5 miles correspond à 2.4 km, il suffit de multiplier par $\dfrac{1.5}{2.4} = 0.625$ pour obtenir les miles à partir des kilomètres.

2) Ici il faut multiplier par $\dfrac{238}{780} \approx 0.305$.

3) Les deux situations sont linéaires. Les graphes sont des droites passant par l'origine de pente respectivement 0.605 et 0.305.

Exercice 8

1) Pour l'équation (a) Jean-Pascal aurait dû faire attention en extrayant la racine carrée. Si la fonction racine carrée prend effectivement la valeur 2 en 4, c'est-à-dire $\sqrt{4} = 2$, il y a un deuxième nombre dont le carré vaut 4, c'est -2. La méthode de factorisation d'Arlette est plus sûre.

   Pour (b) Jean-Pascal a simplifié par x alors que l'inconnue pourrait prendre la valeur zéro (et on ne peut pas diviser par zéro). De fait, ce faisant, Jean-Pascal a oublié une réponse possible. Il aurait mieux valu ne diviser par x que si $x \neq 0$ et discuter du cas $x = 0$. Ou alors, comme Arlette, de factoriser après avoir mis en évidence.

2) L'équation n'étant pas du premier degré, Vincent aurait dû regrouper tous les termes dans le premier membre.

$$\begin{aligned} \mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 5 - 9\mathrm{x} + 4 + 3\mathrm{x}^2 &= 0 \\ 4\mathrm{x}^2 - 12\mathrm{x} + 9 &= 0 \\ (2\mathrm{x} - 3)^2 &= 0 \\ \mathrm{x} &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Donc $S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

Exercice 9 (Optionnel)

Equations fruitées. Clairement la pomme vaut 10. La deuxième équation nous apprend alors que deux régimes de quatre bananes valent 8, chacun d'eux vaut donc 4. La troisième équation nous permet ensuite de conclure que la noix de coco vaut 2.
En conclusion, la demi noix de coco + une pomme + 3 bananes $= 1 + 10 + 3 = 14$.

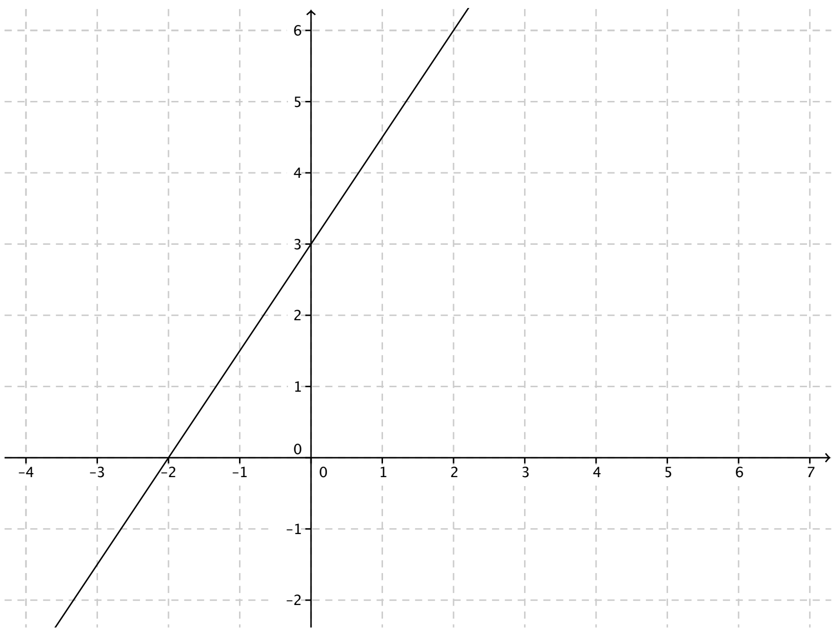
Exercice 10

1) (a) Il faut ajouter -12 de part et d'autre pour obtenir $x = -7$.

   (b) Il faut multiplier par $\frac{3}{2}$ pour obtenir $x = -4 \cdot \frac{3}{2} = -6$

2) L'abscisse du point d'intersection avec l'axe des x est x = 0. Comme il y a une unique intersection (graphe d'une fonction affine est une droite, qui est dans ce cas ni parallèle ni confondue avec l'axe des x), on en conclut que 3x = 0 admet comme unique solution 0, qui est un zéro de f.

3) L'équation $2x + 2 = \frac{1}{2}x - 1$ est équivalente à $\frac{3}{2}x + 3 = 0$. Voici son graphe



   On trouve la solution de l'équation de manière graphique en repérant l'endroit où le graphe coupe l'axe des x. On voit qu'il s'agit de $x = -2$.

Exercice 11

Problèmes.

1) Si x est l'âge de la fille, alors celui de la maman est $x + 22$. Dans deux ans ces âges seront alors $x + 2$ pour la fille et $x + 24$ pour la maman. On sait que la somme de ces nombres donne 50 c'est-à-dire $x + 2 + x + 24 = 50$. On réduit l'expression et on trouve l'équation affine $2x + 26 = 50$ ou encore $2x = 24$ en soustrayant 26 de part et d'autre. On divise enfin par 2 et on obtient $x = 12$. La fille a donc 12 ans et la mère 34 ans. La réponse est plausible et elle est exacte en fait puisque dans deux ans la somme des âges fait $14 + 36 = 50$.

2) Si x est le nombre de merveilleux, alors le nombre d'éclairs vaut $20-x$ puisque la somme des deux doit faire 20. Le prix de x merveilleux est $x \cdot 1,80$ et celui des éclairs $(20-x) \cdot 1,30$. L'équation qui traduit le fait qu'en tout on a vendu pour $32,40$ francs est

$$x \cdot 1,80 + (20-x) \cdot 1,30 = 32,40$$

On réduit cette expression et on trouve $x \cdot 0,50 = 32,40 - 20 \cdot 1,30 = 32,40 - 26,00 = 6,40$. On multiplie le tout par 2 et on arrive à $x = 12,80$. Cette réponse est incohérente, car on vend un nombre entier de merveilleux.

3) Voilà un problème bien connu. Ce nombre est $100a+10b+c$ et le nombre renversé est $100c+10b+a$. Je vous laisse faire les vérifications pour 421 et 124.

4) Avec les notations de 3, on cherche $100a+10b+c$ avec $a=1$, et $b=2c$. Autrement dit ce nombre s'écrit $100+20c+c$. On sait que la somme

$$100 + 20c + c + 100c + 20c + 1 = 665$$

Autrement dit $100(c+1) + 40c + c + 1 = 665$. En regardant le chiffre des unités on obtient $c = 4$ et on vérifie que le nombre 184 convient.

5) D'un triangle rectangle on sait qu'un angle aigu est égal au triple de l'autre angle aigu. Un angle vaut 90^o car le triangle est rectangle. La somme des angles d'un triangle vaut toujours 180^o. Par conséquent la somme des deux angles aigus vaut 90^o Appelons x le plus petit des deux si bien que l'autre vaut $3x$. On sait donc que $x + 3x = 90$, ou encore $x = \dfrac{90}{4} = 22{,}5$.