Cours Euler: Série 22

12 février 2025

Exercice 1

Une équation historique !

FA220 Héritage

Résous ce problème posé par Leonhard Euler (voir p. 138).

Septieme queſtion. Un pere laiſſe quatre fils, qui partagent ſon bien de la maniere qui ſuit :

Le premier prend la moitié de l'héritage, moins 3000 livres.

Le ſecond prend le tiers ; moins 1000 l.

Le troiſieme prend exactement le quart du bien.

Le quatrieme prend 600 livres, & la cinquieme partie du bien.

De combien étoit l'héritage, & combien chaque fils a-t-il reçu ?

Exercice 2

Un peu de théorie. Soit $f, g, h \colon X \to \mathbb{R}$ des fonctions réelles.

1) Démontre que si r est un nombre réel qui est solution de l'équation $f(x) = g(x)$, alors r est aussi solution de l'équation $f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$.

2) Démontre que si r est un nombre réel qui est solution de l'équation $f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$, où $h(x) \neq 0$ sur X, alors r est aussi solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

Exercice 3

1) Résoudre l'équation $x^2 - 1 = 0$ dans les ensembles de définition suivants. Pour les trois premiers ensembles tu peux essayer toutes les possibilités “à la main" et vérifier quels nombres sont des solutions.
   (a) $E = \{1; -1; 5; -6\}$;
   (b) $F = \{3; 1; 0; -5\}$;
   (c) $G = \{2; 7; 3; -12\}$;
   (d) $H = \mathbb{R}$.

2) Résoudre l'équation $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ dans les ensembles de définition suivants.
   (a) $E = \{5; 3; 2; -1; -2; -4\}$;
   (b) $F = \{5; 3; 1; -4; -5\}$;

(c) $G = E \cup F$;

(d) $H = E \cap F$.

Exercice 4

Résolution graphique. On demande de trouver les solutions des équations suivantes par voie graphique. C'est une méthode approximative mais utile pour comprendre la signification de la résolution d'une équation. De plus, il n'y a parfois pas de méthode algébrique et les mathématiciens sont obligés de recourir à des solutions approximatives !

1) $x-10 = 26-2x$. On demande de dessiner les graphes des fonctions $f(x) = x-10$ et $g(x) = 26-2x$.

2) $2x - 1 = 7 - x^2$. On demande de dessiner les graphes pour des valeurs de $x \in [-5; 5]$.

3) $x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$. On demande les solutions au dixième ! En observant la forme du graphe de cette fonction cubique, tu trouveras les solutions approximatives aux endroits où la fonction *change de signe*. Il s'agit alors de tester les valeurs de x de 0,1 en 0,1 et trouver celle pour laquelle l'expression $x^3 + x^2 - 3x - 3$ est la plus proche de zéro. Si on constate par exemple que la fonction s'annule autour de 4, on essaiera les valeurs de x égales à 4, puis 4,1 et 3,9, puis 4,2 et 3,8, etc.

Exercice 5

Equations équivalentes I. Réduis les expressions polynomiales de ces équations, puis résous-les en utilisant les règles d'équivalence vue au cours :

1) $3x - 2x = 9$

2) $5(x + 4) - 4x - 20 = 2(x - 5) - 2x$

3) $(1 - x) - (1 - 2x) = 3$

4) $11x-(x+2x+3x+4x) = 6(3x+2)-2(9x-5)$

5) $10x-(x+2x+3x+4x) = 6(3x+2)-2(9x-5)$

6) $3\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}x + \frac{7}{6}x\right) = 8$

Exercice 6

Equations équivalentes II. On donne dans chaque partie deux équations. Réduis les équations et détermine, sans nécessairement résoudre les équations, si elles sont équivalentes.

1) $5 + 2x + 3x - 12 - 4x + 7 = 8$ et $x = 8$.

2) $15x - (7x + 8) = 3x + 2$ et $3x + 10 - (8 - 5x) = 3(x + 3) - 7$

3) $\frac{x}{2} + \frac{5x}{3} = 5 + 2x$ et $\frac{13x}{6} = \frac{10}{2} + \frac{5x}{3} + x - \frac{2x}{3}$

4) $(x - 2)(x + 2) = x + 1$ et $x^2 - 7 + 3 = 5(x + 1) - 4x - 4$

5) $x^2 + 4x + 4 = 5x + 2$ et $(x + 2)^2 = 12x - 7(x + 2) + 15$

6) $(x - 5)(x - 4) = 6$ et $(x - 3)(x - 6) + 2 = 6$.

Exercice 7 (Optionnel)

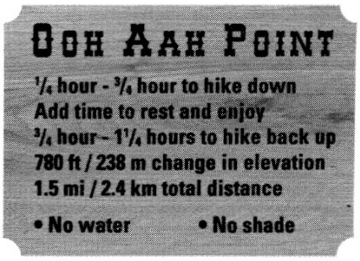
FA28 Grand Canyon

Parti en vacances aux Etats-Unis, Fabio prévoit de faire une randonnée dans le Grand Canyon. Il lit le panneau ci-contre :

a) Comment passe-t-on des kilomètres aux miles ?

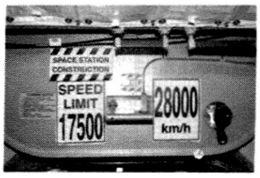
b) Comment passe-t-on des pieds (ft = feet) aux mètres ?

c) Représente ces deux situations dans deux graphiques différents.



La NASA *(National Aeronautics and Space Administration)*, l'administration gouvernementale responsable du programme spatial des Etats-Unis, n'est pas à l'abri des problèmes de transformations d'unités ; ses scientifiques ont avoué qu'une erreur de calcul, due à une confusion entre *miles* et *kilomètres*, avait provoqué l'échec d'une mission.

En 1999, une sonde avait atteint Mars, mais s'était écrasée dès son premier passage au-dessus de la face cachée de la planète. La NASA avait plus tard révélé que ses ingénieurs s'étaient embrouillés lors de la simple conversion d'unités métriques en unités anglo-saxonnes d'une information concernant une trajectoire.



La NASA indique, de plus, que seuls les Etats-Unis, la Birmanie et le Liberia utilisant toujours les miles pour mesurer les distances, ses projets sont désormais réalisés en utilisant uniquement le système métrique et les unités du Système international.

Exercice 8

1 a Arlette et Jean-Pascal sont chargés de résoudre, au tableau noir, l'équation suivante : $x^2 = 4$.

Arlette écrit :

$$x^2 = 4$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$(x+2)(x-2) = 0$$
$$x+2 = 0 \text{ ou } x-2 = 0$$
$$x = -2 \text{ ou } x = 2 \qquad S = \{-2; 2\}.$$

Jean-Pascal écrit :

$$x^2 = 4$$
$$x = \sqrt{4}$$
$$x = 2 \qquad S = \{2\}.$$

Peux-tu expliquer l'erreur commise par l'un des deux élèves ?

b Une deuxième équation leur est proposée : $x(2x-1) = x(x+2)$

Arlette écrit :

$$x(2x-1) - x(x+2) = 0$$
$$x(2x-1-x-2) = 0$$
$$x(x-3) = 0$$
$$x = 0 \text{ ou } x = 3 \qquad S = \{0; 3\}.$$

Jean-Pascal écrit :

$$x(2x-1) = x(x+2)$$
$$2x - 1 = x + 2$$
$$2x - x = 2 + 1$$
$$x = 3 \qquad S = \{3\}.$$

Et cette fois, qui a commis l'erreur et laquelle ?

2 Vincent se rappelle que, pour résoudre une équation, on place les « termes en x » à gauche et les autres à droite. Il opère ainsi :

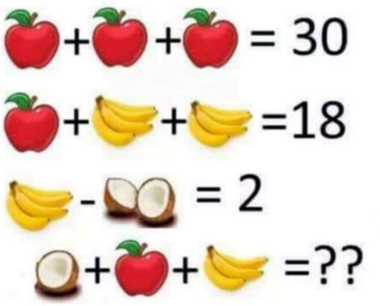
$$x^2 - 3x + 5 = 9x - 4 - 3x^2$$
$$x^2 - 3x - 9x + 3x^2 = -4 - 5$$
$$4x^2 - 12x = -9$$
$$4x(x-3) = -9$$

... et il ne peut achever son travail !

Quelle erreur a-t-il commise au départ ? Tente, à ton tour, de résoudre l'équation.

Exercice 9 (Optionnel)

Equations fruitées : Le buzz sur internet (février 2016).



Attention. Le nombre de bananes n'est pas le même à chaque fois.

Exercice 10

1) Quelles opérations faut-il effectuer pour isoler l'inconnue x dans les équations suivantes :

   (a) $x + 12 = 5$

   (b) $\dfrac{2}{3}x = -4$

2) On considère la fonction réelle $f(x) = 3x$. Dessine le graphe de cette fonction sur du papier quadrillé (ou millimétré) et donne l'abscisse du point d'intersection de ce graphe avec l'axe des x. Quelle conclusion peut-on en tirer sur les solutions de l'équation $3x = 0$?

3) On considère l'équation $2x + 2 = \dfrac{1}{2}x - 1$. Transforme cette équation en une équation équivalente de la forme
$$mx + h = 0$$
puis dessine sur du papier quadrillé (ou millimétré) le graphe de la fonction $f(x) = mx + h$. Explique enfin comment on peut trouver graphiquement la solution de cette équation et donne cette solution.

Exercice 11

Problèmes. Suis les indications dans chaque cas pour résoudre le problème proposé.

1) Une mère a 22 ans de plus que sa fille. Dans deux ans la somme de leurs âges sera 50 ans. Quel est l'âge actuel de la fille ?

   Si x est l'âge de la fille, exprime l'âge de la mère en fonction de x ; puis exprime l'âge de la mère et de sa fille dans deux ans (en fonction de x) et traduis le problème en une équation. Résous cette équation et exprime la solution du problème en une phrase qui fais le lien avec l'énoncé original. Vérifie enfin que la solution répond à la question !

2) Dans une pâtisserie on a vendu des éclairs à 1,30 et des merveilleux à 1,80. On a vendu en tout 20 pièces pour une somme de 32,40. Combien a-t-on vendu d'éclairs et de merveilleux ?

   Si x est le nombre d'éclairs, trouve combien il y a de merveilleux en fonction de x, puis trouve combien d'argent rapportent les éclairs et combien d'argent rapportent les merveilleux (en fonction de x). Traduis le problème en équation, résous-la et exprime la solution du problème en une phrase qui fais le lien avec l'énoncé original. Vérifie !

3) On considère un nombre naturel à 3 chiffres. Si a est le chiffre des centaines, b celui des dizaines et c celui des unités, comment exprimes-tu ce nombre ? Et comment exprimes-tu le nombre « renversé » ? Lorsque $a = 4$, $b = 2$ et $c = 1$ vérifie que tes solutions donnent bien les nombres 421 et le nombre « renversé » 124.

4) On cherche un nombre à 3 chiffres, inférieur à 200 dont le chiffre des dizaines est le double de celui des unités. La somme de ce nombre et du nombre renversé est égale à 665.

5) D'un triangle rectangle on sait qu'un angle aigu est égal au triple de l'autre angle aigu. Quel est la mesure des trois angles de ce triangle ?

A partir d'ici les exercices sont des problèmes de test d'autres années. Gardez-les pour vous entraîner quand vous êtes prêts. Ces exercices ne seront pas corrigés.

Exercice 12 (Optionnel)

Les nombres réels. On lit dans le journal Le Monde du 15 février : Cérès est une planète naine, orbitant dans la ceinture d'astéroïdes entre Mars et Jupiter, à environ 360 millions de kilomètres du Soleil. Son diamètre est de 950 kilomètres, et elle représente le tiers de la masse de la ceinture d'astéroïdes. Dans le journal Science du 17 février, des chercheurs italiens et américains de la NASA et de l'Institut d'astrophysique et de planétologie spatiale de Rome (IAPF) expliquent y avoir détecté, pour la première fois, la présence de molécules organiques.

(1) Sachant que la vitesse de la lumière vaut 300'000'000 m/s (mètres par seconde), calcule le temps qu'il faut, en minutes, pour qu'un rayon de Soleil parvienne sur Cérès.

(2) L'orbite de Cérès autour du Soleil n'est pas circulaire et sa distance maximale au Soleil est $414'103'605,89742368584$ km. Approxime ce nombre au centième.

Exercice 13 (Optionnel)

Egalité de polynômes. On travaille dans $\mathbb{R}[x]$. Calcule toutes les valeurs possibles des nombres réels a et b pour que les polynômes $p = x^2 + (3-a)x - 7$ et $q = (x-b)(x+b)$ soient égaux.

Exercice 14 (Optionnel)

Réduction de monômes et de polynômes.

(1) Dans $\mathbb{R}[x,y]$ quels sont les degré et coefficient du monôme $-3xyx(\sqrt{3}\ x^2y^3)(-\sqrt{5}\ x)$?

(2) Dans $\mathbb{Z}[x,y,z]$ écris le polynôme $(2x+3y)(3x-2y)$ sous forme réduite.

(3) Dans $\mathbb{R}[x]$ écris le polynôme $(x+3)(x+3)(1-x)(x-2)$ sous forme ordonnée et réduite.

Exercice 15 (Optionnel)

Un peu de théorie.

(1) Donne la définition de $x^{-\frac{11}{4}}$ en termes de puissances et de racines. Pour quelles valeurs de x cette expression a-t-elle un sens ?

(2) Démontre que $\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}$ pour tous les nombres réels x et y en te basant sur des propriétés des puissances entières.

(3) Démontre que $\sqrt{7}$ n'est pas un nombre rationnel. Il n'est pas nécessaire de démontrer les propriétés de divisibilité utilisées.

Exercice 16 (Optionnel)

Vrai ou Faux Justifie brièvement chaque réponse.

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\sqrt[4]{x^4} = \mid x \mid$.
(2) On a $\sqrt{13} > 3{,}5$.
(3) Il existe un polynôme $p \in \mathbb{R}[x]$ tel que $p^2 = x^2 + 6x + 9$.
(4) Il existe un polynôme $p \in \mathbb{R}[x]$ tel que $p^2 = x + 100$.

Exercice 17 (Optionnel)

Simplification. Ecris le nombre réel $\dfrac{5}{\sqrt[7]{125}\sqrt[7]{5}}$ en faisant disparaître les racines du dénominateur.