Cours Euler: Corrigé 21

5 février 2025

Exercice 1

Composition de fonctions I. On choisit des ensembles de définition maximaux.

1) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $x \mapsto x + 4$ est $\mathbb{R}$.
L'ensemble de définition de la fonction g définie par $x \mapsto x^2$ est $\mathbb{R}$.
Donc la composée $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$. On considère alors $g \circ f : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 4) = (x + 4)^2$.
2) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $x \mapsto x + 1$ est $\mathbb{R}$.
L'ensemble de définition de la fonction g définie par $x \mapsto 1/x$ est $\mathbb{R}^*$.
Donc la composée $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On considère alors $g \circ f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^* \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = \frac{1}{x+1}$.
3) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $x \mapsto x^2$ est $\mathbb{R}$.
L'ensemble de définition de la fonction g définie par $x \mapsto x - 2$ est $\mathbb{R}$.
Donc la composée $g \circ g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$. On considère alors $g \circ g \circ f : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $(g \circ g \circ f)(x) = g(g(f(x))) = g(g(x^2)) = g(x^2 - 2) = (x^2 - 2) - 2 = x^2 - 4$.
4) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $x \mapsto x - 2$ est $\mathbb{R}$.
L'ensemble de définition de la fonction g définie par $x \mapsto 2 \cdot x$ est $\mathbb{R}$.
L'ensemble de définition de la fonction h définie par $1/x$ est $\mathbb{R}^*$.
Donc la composée $h \circ g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. On considère alors $h \circ g \circ f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^* \xrightarrow{g} \mathbb{R}^* \xrightarrow{h} \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))) = h(g(x - 2)) = h(2 \cdot (x - 2)) = \frac{1}{2 \cdot (x-2)}$.
5) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $x \mapsto x^2$ est $\mathbb{R}$.
Donc la composée $f \circ f \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$. On considère alors $f \circ f \circ f : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(x^2)) = f((x^2)^2) = f(x^4) = (x^4)^2 = x^8$.
6) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $x \mapsto x - 5$ est $\mathbb{R}$.
L'ensemble de définition de la fonction g définie par $x \mapsto x^2$ est $\mathbb{R}$.
Donc la composée $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$. On considère alors $g \circ f : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 5) = (x - 5)^2$.
7) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $x \mapsto 1/x$ est $\mathbb{R}^*$.
Donc la composée $f \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. On considère alors $f \circ f : \mathbb{R}^* \xrightarrow{f} \mathbb{R}^* \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, définie pout tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1/x) = x$.

Exercice 2

Composition de fonctions II. Il y a toujours plusieurs solutions possibles ici. Les solutions suivantes ne sont donc pas uniques.

(a) $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2$, $A = B = C = \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^2$, $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $B = C = \mathbb{R}$

(c) $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$, $A = B = C = \mathbb{R}$

(d) $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $A = C = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(e) $f(x) = (x + 2)^2, g(x) = \dfrac{1}{x}$, $A = \mathbb{R} - \{-2\}$, $B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $C = \mathbb{R}$

Exercice 3

Composition de fonctions III. Dans tout l'exercice, on note les ensembles de définition de la façon suivante, $g \circ f : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$.

(a) $g(f(x)) = g(x + 5) = (x + 5)^2$, avec $A = B = C = \mathbb{R}$.

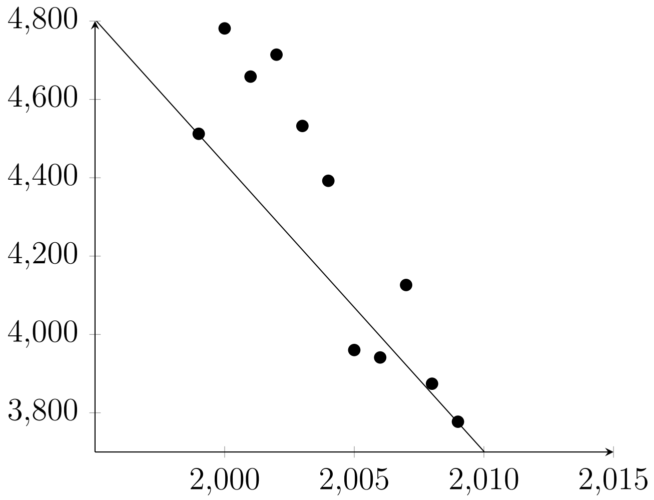
(b) $g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 5$, avec $A = B = C = \mathbb{R}$.

(c) $g(f(x)) = g(x + 1) = \frac{1}{x+1}$, avec $A = \mathbb{R} - \{-1\}, B = R^*, C = \mathbb{R}$.

(d) Remarquons d'abord que $g(y) = y^2 - 2y + 1 = (y - 1)^2$. Donc $g(f(x)) = g(x - 1) = (x - 1 - 1)^2 = (x - 2)^2$, avec $A = B = C = \mathbb{R}$.

(e)
- $f(g(1)) = f(3 + 2) = f(5) = 25 - 1 = 24$
- $g(f(1)) = g(1 - 1) = g(0) = 2$
- $f(g(-2)) = f(-6 + 2) = f(-4) = 16 - 1 = 15$
- $f(g(-3)) = f(-9 + 2) = f(-7) = 49 - 1 = 48$
- $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-1) = -3 + 2 = -1$
- $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(6 + 2) = f(8) = 64 - 1 = 63$
- $(g \circ f)(0.5) = g(f(0.5)) = g(0.25 - 1) = g(-0.75) = -\frac{9}{4} + \frac{8}{4} = -\frac{1}{4}$
- $(g \circ f)(8) = g(f(8)) = g(63) = 3 \cdot 63 + 2 = 191$

Exercice 4



a)

b) L'évolution des accidents est approximativement affine. Mais prendre les points de départ et d'arrivée ne donne pas la meilleure approximation. Il faudrait utiliser un méthode de *régression linéaire* (sujet de 3ème année du Cours Euler !) pour trouver la meilleure approximation affine.

c) Pour déterminer la pente de la droite $f(x) = ax + b$ passant par $(1999; 4510)$ et $(2009; 3775)$, on commence par calculer la pente qui se calcule comme

$$a = \frac{f(2009) - f(1999)}{2009 - 1999} = -\frac{147}{2}.$$

On sait encore que $3775 = f(2009)$, donc $3775 = -\frac{147}{2} \cdot 2009 + b \iff b = \frac{302872}{2}$.
L'approximation utilisant le point de départ et d'arrivée est donc la fonction

$$f(x) = -\frac{147}{2}x + \frac{302873}{2}.$$

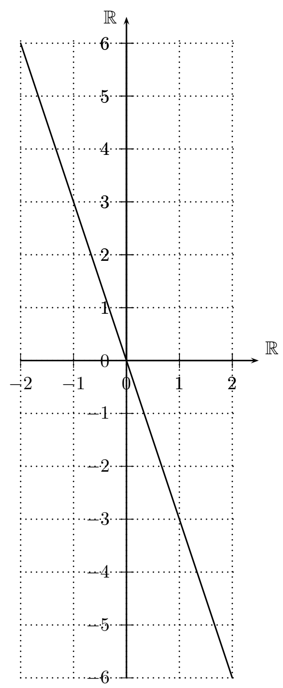
Exercice 5

Nous associons des équations de droites à des graphiques comme suit : Transformer l'équation sous la forme $y = ax+b$ (par exemple pour la 6ème : $y = 1$). C'est donc une droite de pente a et ordonnée à l'origine b. Pour chaque droite, on cherchera ainsi l'équation qui possède la bonne pente et la bonne ordonnée à l'origine.

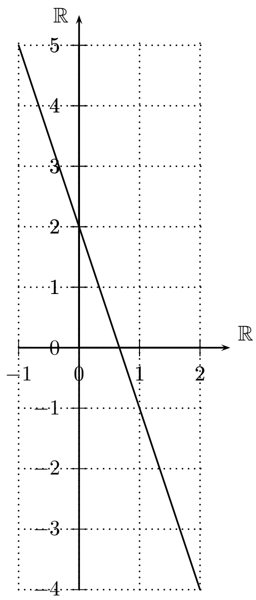
Equation	droite	Equation	droite
1) $y = \frac{4-3x}{2}$	c)	4) $y = x$	f)
2) $y = -x + 2$	d)	5) $y = 3x$	a)
3) $y = \frac{1}{3}x + 1$	b)	6) $y = 1$	e)

Exercice 6

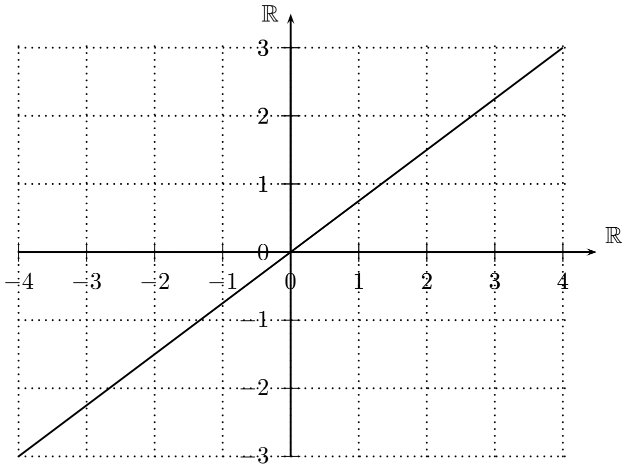
1) Linéaire.



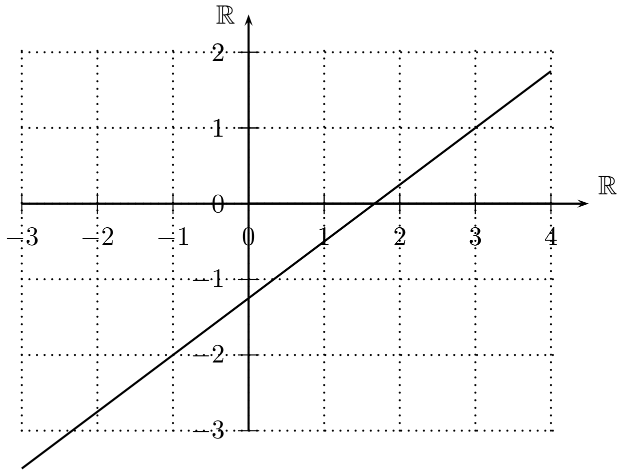
2) Affine générale.



3) Linéaire.



4) Affine générale.



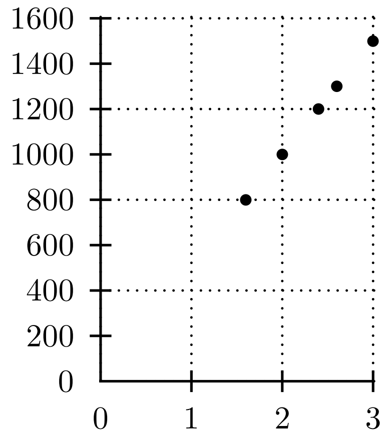
Le point $A = (0;3)$ n'appartient à aucun graphe, puisqu'aucun des fonctions n'admet 3 comme ordonnée à l'origine. Le point $B = (0;0)$ appartient au graphe de a et c qui sont linéaires. Le point $C = (4;3)$ appartient au graphe de c, $D = (4;-2)$ à aucun et $E = (-3;11)$ à celui de b.

Exercice 7

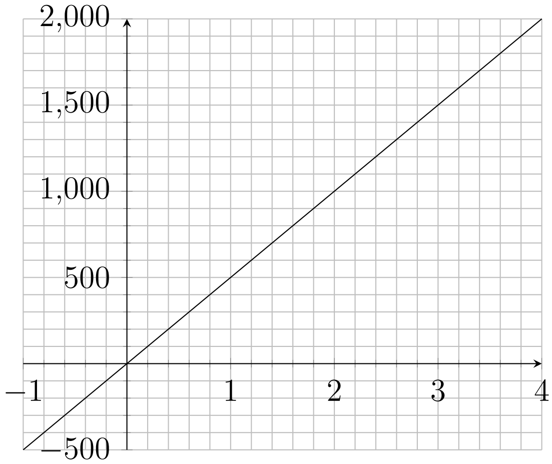
1) a) Comme les miniatures ont tous la même échelle, alors les longueurs des miniatures sont tous proportionnels aux longueurs des véhicules. Le coefficient de proportionnalité des miniatures aux véhicules est 500.

Longueurs des miniatures	1.6	2	2.4	2.6	3
Longueurs des véhicules	800	1000	1200	1300	1500

b)



c) La formule est $y = 500x$. Le graphe de la fonction affine correspondante passe par tous les points trouvés.

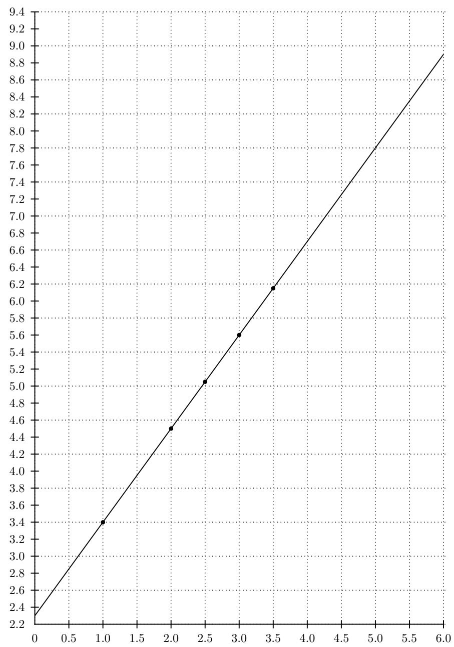


2) a) La formule est $y = 2.3 + 1.1x$

b)

x	1	2	2.5	3	3.5
y	3.4	4.5	5.05	5.6	6.15

c)



d) L'ordonnée du point dont l'abscisse est 4 est 6.7, ce qui signifie qu'il faut payer 6.7 pour parcourir 4 km. L'abscisse du point dont l'ordonnée est 8.9 est 6, ce qui signifie que pour parcourir 6 km, il faut payer 8.9.

Exercice 8

1) Non. Il s'agit du double de carburant, mais moins du double de distance.

2) Non. La taille a doublé, mais pas l'âge.

3) Oui. Si n est le nombre de lampes et a est le nombre de kilowatts consommés, alors la formule $f(n) = an$ décrit la consommation de n lampes. Cette fonction est linéaire et décrit une situation de proportionnalité.

4) On commence par calculer l'aire d'une des faces. Sachant qu'un cube a 6 faces, alors l'aire totale des faces d'un cube est 6 fois l'aire d'une face. Si c est la longueur du côté d'une des faces, alors c^2 est l'aire d'une face. Donc l'aire totale des faces d'un cube est $6c^2$. Le volume de ce même cube vaut c^3.

5) Soit x le prix initial. On sait que 25% de x est $\frac{x}{4}$. Donc le prix final f est

$$f = x - \frac{x}{4} = \frac{3}{4}x.$$

La fonction qui redonne le prix initial est $g(y) = \frac{4}{3}y$. Attention ! Il ne faut pas ajouter 25% au prix réduit pour retrouver le prix initial, mais bien 33% !

6) Sur une carte au 1: 50′000 une distance réelle de 1000 m est représentée par

$$\frac{1000}{50'000} = \frac{1}{50} = 0{,}02 \text{ m} = 2 \text{ cm}.$$

Si la distance mesurée entre deux sommets alpins est de 5 cm, alors la vraie distance vaut 2,5 km.

7) Sur une carte au 1: 25′000 la longueur de la course est de 17,3 cm. Puisque 1 km est représenté par 4 cm sur la carte, la vraie distance est de

$$\frac{17{,}3}{4} = 4{,}325 \text{ km} = 4325 \text{ m}.$$

Le dénivelé de cette course est de $2315 - 1290 = 1025$ m. La pente moyenne de cette descente vaut donc

$$-\frac{1025}{4325} \approx -0{,}237.$$

8) Le symbole “12%" indique que l'on descend (ou monte) de 12 mètres si on avance horizontalement de 100 mètres. Il s'agit donc précisément de la pente, qui ici est de 0,12.

Une route qui fait un angle de 12° a une pente de 21% environ. On peut mesurer cela sur son rapporteur par exemple. C'est donc elle la plus raide. On se rend compte d'ailleurs qu'un angle de 45° correspond à une pente de 100%.

Exercice 9

1) La pente vaut -2 et l'ordonnée à l'origine vaut 3, la fonction est donc $f(x) = -2x + 3$.

2) Si le graphe passe par $(2; 3)$ et $(-2; 1)$, alors la pente vaut

$$\frac{3-1}{2-(-2)} = \frac{1}{2}$$

si bien que la fonction est de la forme $f(x) = \frac{1}{2}x + h$. Il reste à trouver h. Il faut que $f(2) = 3$ donc que $1 + h = 3$. Par conséquent $h = 2$ et $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$.

3) Si le point $(1; 4)$ appartient au graphe de la droite d'équation $y = 3x + t$, alors $4 = 3 \cdot 1 + t$. Donc $t = 1$.

4) Si la droite d'équation $y = kx + 3$ est parallèle à l'axe des x, alors sa pente est nulle. Donc $k = 0$.

5) Si la droite d'équation $y = ax - t$ est perpendiculaire à la droite d'équation $y = 2x + 1$, la pente a doit valoir $-\frac{1}{2}$. En effet si on parcourt une distance verticale u et une distance horizontale v sur une droite, alors sur une droite perpendiculaire ce sera une distance verticale v sur une distance horizontale $-u$. Une droite de pente m est donc perpendiculaire à une droite de pente $-1/m$.

6) Si $B = (5; \frac{s}{2})$ est un point de la droite d'équation $2x - 3y + 6 = 0$, alors s doit satisfaire à l'équation

$$2 \cdot 5 - 3 \cdot \frac{s}{2} + 6 = 0$$

Autrement dit $3s/2 = 16$ et donc $s = 32/3$.

Exercice 10

L'équation d'une parabole. D'une part $d(P, h) = |y - 2|$, donc $d(P, h)^2 = y^2 - 4y + 4$. D'autre part par le Théorème de Pythagore

$$d(P; F)^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1.$$

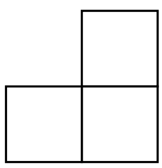
Pour que ces deux expressions soient égales il faut que $-4y = x^2 - 4x - 2y + 1$ ou de manière équivalente $-2y = x^2 - 4x + 1$. Finalement $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$. La fonction cherchée est donc $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$.

Exercice 11 (Optionnel)

A la première étape on compte deux éléments de motif, puis on ajoute deux éléments à chaque étape. Il y a donc $2n$ éléments de motif à la n-ème étape. En particulier 4022 éléments à la 2011-ème étape.

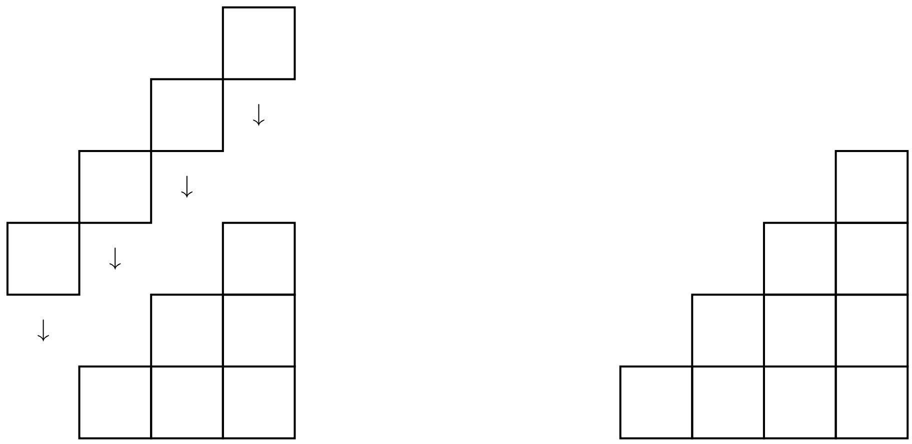
Dans chaque élément de motif on compte deux diagonale, il y a donc le double de diagonales, c'est-à-dire $4n$ à la n-ème étape. Il y a 4 points verts sur un élément, mais le problème se complique légèrement maintenant compte tenu du fait que certains points sont ré-utilisés dans les éléments suivants. Le plus simple est de compter les points (6) à la 1ère étape et de remarquer qu'on ajoute 3 points à chaque étape. Il y a donc $3(n + 1)$ points verts à la n-ème étape. En particulier 6036 à la 2011-ème étape.

On considère maintenant cet escalier construit avec des cubes identiques. Commençons par noter $f(n)$ le nombre de cubes nécessaires pour la construction en escalier simple à n marches. On cherche une formule pour exprimer $f(n)$. Comment peut-on calculer $f(n)$? Considérons l'escalier simple à 2 marches :



En ajoutant 3 cubes comme sur le dessin ci-dessous à gauche, on obtient l'escalier simple à 3 marches à droite :

Pour obtenir l'escalier à 4 marches, c'est la même chose : on ajoute 4 cubes pour obtenir un escalier de 4 marches :



Qu'en déduit-on pour le cas de l'escalier simple à n marches ? On en déduit que pour construire l'escalier à n marches, il faut d'abord construire l'escalier à $n-1$ marches, puis ajouter n cubes selon la même méthode qu'indiquée ci-dessus.
En équation, cela peut s'écrire

$$f(n) = n + f(n-1)$$

Puisque $f(n-1) = n-1+f(n-2)$, on obtient :

$$f(n) = n + n - 1 + \cdots + 1.$$

Montrons par récurrence que

$$f(n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On commence avec $n = 1$: dans ce cas, pour construire l'escalier à 1 marche il ne faut qu'un seul cube. Donc $f(1) = 1$.
Supposons que la formule est vraie de 1 à $n-1$, et montrons qu'elle est vraie pour n. Autrement dit, on a établi que $f(n) = n + f(n-1)$ et on suppose que $f(n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$; on doit montrer avec ça que $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$:

$$f(n) = n + f(n-1) = n + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{2n}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{2n+n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

On trouve bien que $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Autrement dit, on a montré que si la formule est vraie de 1 jusqu'à $n-1$, alors elle est vraie pour n. On en déduit que la formule pour $f(n)$ est vraie pour tout entier n. Cette technique s'appelle la **preuve par récurrence**.

Finalement, pour $n = 1500$, on calcule $f(1500) = 1125750$.

Exercice 12 (Optionnel)

En Suisse le nombre d'utilisateurs passe de 4,6 millions à 5,7 millions. Cela représente un facteur de 1,24 environ. En Inde cela passe de 21 millions 105 millions. C'est un facteur 5. La Suisse étant un pays riche, l'implantation de l'internet a commencé plus tôt.

Le quotient 5,7/7,7 vaut environ 0,74. Cela veut dire que près de 75% de la population a accès à internet. Cela fait trois personnes sur quatre. C'est beaucoup !

En Inde la proportion est de 105 millions sur 1,15 milliard. Le quotient

$$\frac{105}{1150} \approx 0{,}09$$

vaut moins de 0,1. Cela représente donc moins de 10% de la population qui a accès à internet. C'est probablement peu pour nos standards...

Il faut essayer d'extrapoler (ces extrapolations datent de 2010 !). Si on imagine que le nombre d'utilisateurs suit une courbe "continue" et "lisse" que l'on peut dessiner en suivant les hauts des colonnes sans lever le crayon et sans faire de zig-zags on peut estimer le nombre d'utilisateurs en Suisse à 6,2 millions (?), car la pente de la courbe diminue. En Inde, la pente au contraire augmente ! Peut-être arrivera-t-on à un demi-milliard dans une dizaine d'années ?
En réalité on apprend qu'en 2020 il y a plus de 8 millions d'utilisateurs, soit près de 95% de la population (Data Reportal, Digital Switzerland). En Inde, ils sont près de 700 millions (Statista.com). On voit la difficulté de faire des prévisions...

Exercice 13 (Optionnel)

Comme b divise c^2 et c divise a^2, on en déduit que b divise a^4. De plus c divise a^2 et bien entendu a divise a. On conclut que $a \cdot b \cdot c$ divise $a \cdot a^4 \cdot a^2 = a^7$.
Le même raisonnement s'applique pour montrer que abc divise également b^7 et c^7. Une somme de multiples de abc étant encore un multiple de abc, on conclut finalement que abc divise la somme $a^7 + b^7 + c^7$.