Cours Euler: Corrigé 20

7 février 2024

Exercice 1

Représentation schématique d'une fonction.

Exercice 2.2.3

1)

Correspondance	est une fonction
$\mathcal{A}$	non
$\mathcal{B}$	non
$\mathcal{C}$	oui
$\mathcal{D}$	oui

Relation $\mathcal{A}$: le 1er axiome de la définition de fonction n'est pas vérifié, il y a un élément de l'ensemble de départ qui n'est en relation avec aucun élément de l'ensemble d'arrivée.

Relation $\mathcal{B}$: le 2ème axiome de la définition de fonction n'est pas vérifié, il y'a un élément de l'ensemble de départ qui est en relation avec deux éléments différents de l'ensemble d'arrivée.

2)

Correspondance	est une fonction
$\mathcal{A}$	oui
$\mathcal{B}$	oui
$\mathcal{C}$	oui
$\mathcal{D}$	oui

Exercice 2.2.4

1) $f(1) = 1$, $f(3) = 9$, $f(4) = 16$
2) $f(1) = 1$, $f(3) = 0$, $f(4) = 1$
3) $f(1) = 0$, $f(3) = 1$, $f(4) = 2$

Exercice 2.2.5

1) $f(a) = c$, $f(c) = a$, $f(d) = e$
2) $f(a) = b$, $f(c) = e$, $f(d) = d$
3) $f(a) = 1$, $f(c) = 3$, $f(d) = 4$

Exercice 2.2.6

1) $f(a) = 6$, $f(c) = 10$, $g(2) = p$, $g(10) = n$
2) $f(b) = 2$, $g(6) = m$, $f(d) = 4$, $g(4) = q$, $g(8) = n$
3) $g(f(d)) = g(4) = q$
4) $g(f(a)) = g(6) = m$, $g(f(b)) = g(2) = p$, $g(f(c)) = g(10) = n$

Exercice 2

Graphe de fonction I.

fonction	graphique
$A: \quad y = -2x$	3
$B: \quad y^2 = x$	4
$C: \quad y = \frac{1}{x}$	6
$D: \quad y = -x^2$	2
$E: \quad y = \sqrt{x}$	1
$F: \quad y = -x + 2$	5

Le graphe 4 qui correspond à la relation $y^2 = x$ n'est pas celui d'une fonction. La droite verticale d'abscisse 1 par exemple passe par deux points : l'image de 1 n'est pas bien définie.

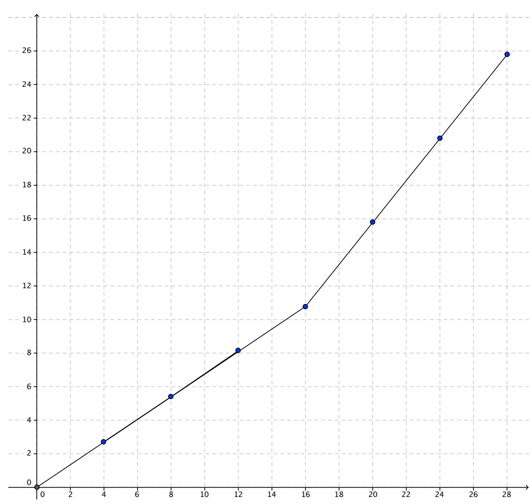
Exercice 3

Graphe de fonction II.

relation	fonction	$f(-2)$	ordonnée à l'origine	préimages de -1	Zéros
1	oui	2	$(0,3)$	4	$(3,0)$
2	non				
3	oui	-9	$(0,-1)$	0	$(1,0)$
4	oui	-5	$(0,-1)$	0 et 4	$(1,0)$ et $(3,0)$
5	oui	3	$(0,2)$	6	$(4,0)$
6	non				

Méthode. Pour déterminer si une courbe est la représentation graphique d'une fonction, il faut vérifier que chaque élément de l'ensemble de départ est en relation avec un unique élément de l'ensemble d'arrivée. Pour cela, on regarde la courbe de gauche à droite, et on observe si à chaque abscisse il correspond une et une seule ordonnée. A chaque élément de l'ensemble de départ, on doit pouvoir tracer une droite orthogonale à l'axe des abscisses qui ne coupe la courbe qu'en un point. Si on peut tracer une droite, orthogonale à l'axe des abscisses qui ne coupe pas la courbe ou qui la coupe à plusieurs endroits, cette courbe n'est pas la représentation graphique d'une fonction.
Pour cet exercice, il est précisé qu'on doit considérer comme ensemble de départ X tous les $x \in \mathbb{R}$ qui sont en relation. Autrement dit, il suffit de vérifier qu'il n'y pas de droite orthogonale à l'axe des abscisses qui coupe la courbe en plusieurs points, car tous les éléments de l'ensemble de départ seront en relation avec un élément de l'ensemble d'arrivée.
2). Il y a des éléments de l'ensemble de départ qui sont en relation avec plusieurs éléments de l'ensemble d'arrivée (1 par exemple).
6). Il y a des éléments de l'ensemble de départ qui sont en relation avec plusieurs éléments de l'ensemble d'arrivée (1 par exemple).

Exercice 4



On reporte les points sur le graphe (ou l'axe des abscisses représente le volume d'eau en dl et l'axe des ordonnées celui de la hauteur en cm). On observe que les quatre premiers points sont alignés et les quatre derniers également. Cela signifie que le vase a une largeur constante jusqu'à 10,8 cm, puis il se resserre (car le vase se remplit plus vite dès ce moment) et continue avec une largeur constante.
Ainsi, pour 50 cl on atteindra une hauteur de 34 mm environ, pour 130cl ce sera 88 mm et enfin pour 260cl on atteindra 233 mm.

Exercice 5

1) « traverse » n'est pas une fonction car l'image du Rhin n'est pas bien définie puisque le Rhin passe par Bâle, Bonn, Rotterdam, etc.

2) L'identité est une fonction vue en cours. Elle est injective et surjective.

3) Le plus petit élément de l'ensemble $A \subset \mathbb{N}$ existe et est unique si bien que cette association définit une fonction. Elle est surjective parce que $f(\{n\}) = n$ pour tout n. Elle n'est pas injective puisque $f(\mathbb{N}) = 0 = f(\{0\})$.

4) Ce n'est pas une fonction car il existe des nombres à 7 chiffres qui ne sont pas attribués à des téléphones.

5) Ce n'est pas une fonction car il existe certainement une voiture que personne ne conduisait hier à l'heure indiquée.

6) Ceci définit une fonction par la formule $f(a) = a^2$. Elle n'est pas surjective car -1 n'est pas un carré. Elle n'est pas injective car $f(1) = 1 = f(-1)$.

7) f n'est pas une fonction puisque $f(-1)$ n'est pas déterminé par l'association (-1 n'est pas un carré dans $\mathbb{Z}$).

8) f n'est pas une fonction puisque $f(4)$ n'est pas déterminé (cela pourrait être 2 ou -2).

9) f n'est pas une fonction puisque $f(2)$ n'est pas déterminé par l'association ($\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$).

10) f est la fonction $\sqrt[3]{x}$. Elle est injective et surjective. En effet l'équation $y = \sqrt[3]{x}$ a une unique solution pour tout nombre réel y.

Exercice 6

1) f n'est pas surjective, car aucun élève du cours Euler n'a plus que 20 ans. La fonction n'est pas injective, car il y a des élèves qui ont le même âge. Ainsi f n'est pas bijective.

2) g est surjective, car chaque pays possède au moins une ville. g n'est pas injective car un pays peut avoir plusieurs villes différentes. Donc g n'est pas bijective.

3) h est injective car chaque pays a une seule capitale. h est aussi surjective car chaque pays a une capitale. Ainsi h est bijective.

4) i n'est probablement pas une fonction car elle n'est pas définie pour les élèves très jeunes. Si elle était bien définie, alors i se serait pas injective car deux élèves différents peuvent avoir 13 ans. i est surjective car il y a au moins un élève du cours Euler qui a 15 ans. Donc i n'est pas bijective.

5) Avant de commencer l'exercice, rappelons ce qu'est la représentation binaire à 8 chiffres d'un caractère et l'ASCII :

   La représentation binaire d'un nombre entier naturel est la manière informatisée d'écrire un entier naturel. En informatique, l'information (i.e. un texte, une image,...) est stockée sous forme de séquences de 0 et de 1. En particulier, le nombre 0 est représenté par la séquence 00000000, 1 par 00000001, 2 par 00000010, 3 par 00000011, etc...

On désigne par "ASCII" la codification qui associe à chaque caractère sa représentation binaire. En ASCII, 0 est bien représenté par 00000000.

Autrement dit, ASCII est bien une fonction de $\{0, 1, 2, \ldots, 255\}$ vers l'ensemble des représentations binaires à 8 chiffres.

$ASCII$ est injective, car à chaque représentation binaire il n'y correspond qu'au plus un caractère. $ASCII$ est surjective, car il y a $2^8 = 256$ représentations possibles à 8 chiffres (i.e. il y a 2^8 séquences de 0 et de 1 longues de 8 caractères possibles). Donc $ASCII$ est bijective.

6) T n'est pas surjective, car une température ne peut pas être trop grande (par exemple, il ne peut pas faire $100000°C$ sur Terre). T n'est pas injective : il peut faire la même température à deux minutes différentes d'un jours. Donc T n'est pas bijective.

7) j est injective car un numéro de natel ne peut pas appartenir à deux élèves différents. j n'est pas surjective, car tous les numéros à 10 chiffres ne sont pas de numéros de natel. Donc j n'est pas bijective.

8) k est injective : Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $k(x) = k(y)$. Alors $2x = 2y$ donc $x = y$.

   k est surjective : Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors $k(\frac{y}{2}) = y$, donc y a une préimage.

   Donc k est bijective.

Exercice 7

Un peu de théorie.

(a)1. G_f est bien le graphe d'une fonction.

2. G_f ici n'est pas le graphe d'une fonction, car l'élément $b \in A$ est en relation avec deux éléments différents de B, et l'élément $c \in A$ n'est en relation avec rien.
3. G_f n'est pas le graphe d'une fonction, car l'élément $b \in A$ est en relation avec deux éléments différents de B.

(b)1. $f(a) = a + 4$ est une bijection : pour tout nombre entier b l'unique nombre entier dont l'image est b est $b - 4$, c'est-à-dire $f(b - 4) = b$.

2. $f(a) = 4a$ n'en est pas une : le nombre 1 n'est pas l'image d'un nombre entier. Seuls les multiples de 4 sont atteints par f.
3. $f(a) = a^2$ n'en est pas une : on a $f(1) = f(-1)$ ce qui contredit l'injectivité.
4. $f(a) = -a$ est une bijection : pour tout $b \in \mathbb{Z}$, le seul nombre dont l'image est b est le nombre $-b$.
5. Le reste de la division par 10 n'est pas injectif : $f(10) = 0 = f(20)$.
6. $f(a) = a^3$ n'est pas surjectif : de nombreux nombres entiers ne sont pas des cubes, comme 2 par exemple.
7. $f(a) =| a |$ n'est pas injectif : $f(10) = 10 = f(-10)$.

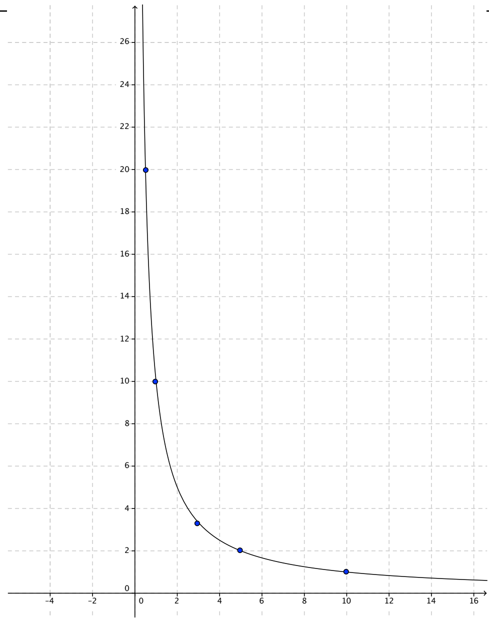
Exercice 8

Un problème géométrique.

Voici le tableau de correspondance entre x et y

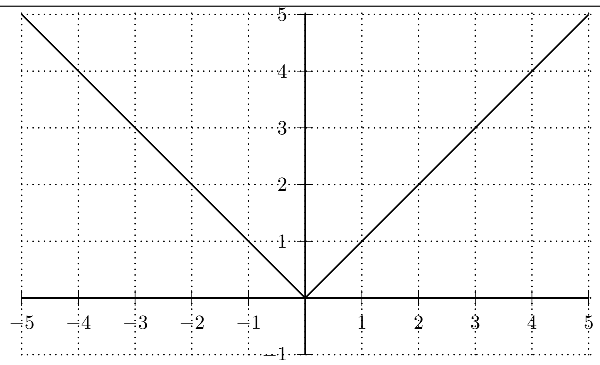
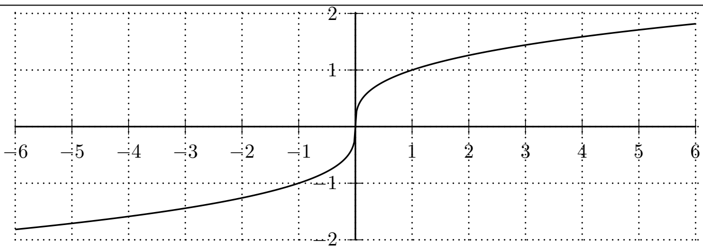
x	$0,5$	1	3	5	10
y	20	10	$3,\bar{3}$	2	1

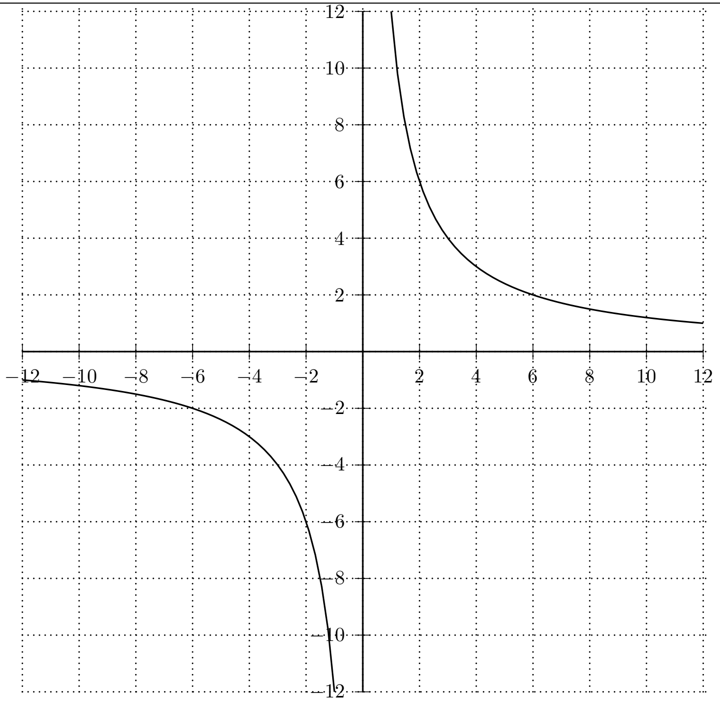
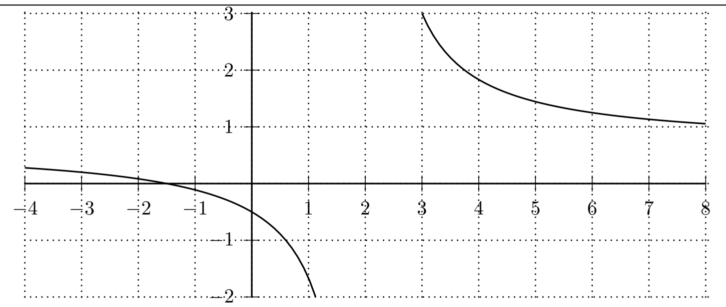
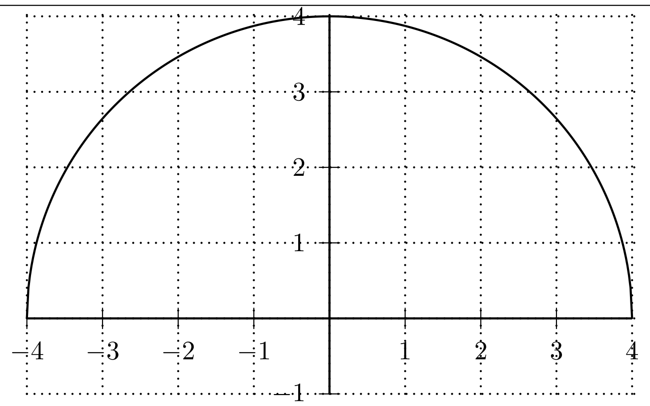
La formule qui exprime y en fonction de x est la fonction $f(x) = \dfrac{10}{x}$. On la déduit du fait que $xy = 10$. Elle n'a de sens géométrique que pour des valeurs $x > 0$.



Exercice 9

Quelques fonctions. Pour tracer le graphe de ces fonctions, on choisira quelques points, certains négatifs, d'autres positifs, en se demandant s'ils font bien partie de l'ensemble de définition de la fonction étudiée. On se gardera de conclure trop vite que le graphe est une droite, mais on essaiera de vérifier la justesse de son intuition en vérifiant si le graphe correspond à la fonction (en testant un autre point par exemple).

Fonction	Ensemble de définition	graphe
$x \mapsto \sqrt{x^2}$	$A = \mathbb{R}$	
$x \mapsto \sqrt[3]{x}$	$A = \mathbb{R}$	

$x \mapsto \dfrac{12}{x}$	$A = \mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	
$x \mapsto \dfrac{2x+3}{3x-6}$	$A = \mathbb{R} \setminus \{2\}$	
$x \mapsto \sqrt{16 - x^2}$	$A = [-4, 4]$	

Exercice 10

Le graphique des cambriolages a l'air beaucoup plus haut en 1999 qu'en 1998. Pourtant on remarque que l'échelle des ordonnées n'est pas respectée ! La différence entre les deux années n'est que de 8 cambriolages, ce qui représente une augmentation de

$$\frac{8}{508} = 0{,}0157 \approx 1{,}57\%$$

Le système d'axes utilisé n'a pas placé l'origine au point $(0, 0)$, mais environ au point $(1997, 500)$, ce qui rend la comparaison visuelle trompeuse, d'autant plus qu'il vaudrait mieux comparer avec plus d'une année de référence…

Exercice 11

Composition de fonctions I. On choisit des ensembles de définition maximaux.

1) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $x \mapsto x+4$ est $\mathbb{R}$.
   L'ensemble de définition de la fonction g définie par $x \mapsto x^2$ est $\mathbb{R}$.
   Donc la composée $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$. On considère alors $g \circ f : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+4) = (x+4)^2$.
2) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $x \mapsto x+1$ est $\mathbb{R}$.
   L'ensemble de définition de la fonction g définie par $x \mapsto 1/x$ est $\mathbb{R}^*$.
   Donc la composée $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On considère alors $g \circ f : \mathbb{R}\backslash\{-1\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^* \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = \frac{1}{x+1}$.
3) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $x \mapsto x^2$ est $\mathbb{R}$.
   L'ensemble de définition de la fonction g définie par $x \mapsto x-2$ est $\mathbb{R}$.
   Donc la composée $g \circ g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$. On considère alors $g \circ g \circ f : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $(g \circ g \circ f)(x) = g(g(f(x))) = g(g(x^2)) = g(x^2-2) = (x^2-2)-2 = x^2-4$.
4) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $x \mapsto x-2$ est $\mathbb{R}$.
   L'ensemble de définition de la fonction g définie par $x \mapsto 2 \cdot x$ est $\mathbb{R}$.
   L'ensemble de définition de la fonction h définie par $1/x$ est $\mathbb{R}^*$.
   Donc la composée $h \circ g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$. On considère alors $h \circ g \circ f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^* \xrightarrow{g} \mathbb{R}^* \xrightarrow{h} \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))) = h(g(x-2)) = h(2 \cdot (x-2)) = \frac{1}{2 \cdot (x-2)}$.
5) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $x \mapsto x^2$ est $\mathbb{R}$.
   Donc la composée $f \circ f \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$. On considère alors $f \circ f \circ f : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(x^2)) = f((x^2)^2) = f(x^4) = (x^4)^2 = x^8$.
6) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $x \mapsto x-5$ est $\mathbb{R}$.
   L'ensemble de définition de la fonction g définie par $x \mapsto x^2$ est $\mathbb{R}$.
   Donc la composée $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$. On considère alors $g \circ f : \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-5) = (x-5)^2$.
7) L'ensemble de définition de la fonction f définie par $x \mapsto 1/x$ est $\mathbb{R}^*$.
   Donc la composée $f \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. On considère alors $f \circ f : \mathbb{R}^* \xrightarrow{f} \mathbb{R}^* \xrightarrow{g} \mathbb{R}$, définie pout tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1/x) = x$.

Exercice 12

Composition de fonctions II. Il y a toujours plusieurs solutions possibles ici. Les solutions suivantes ne sont donc pas uniques.

(a) $f(x) = x+2$, $g(x) = x^2$, $A = B = C = \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^2$, $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $B = C = \mathbb{R}$

(c) $f(x) = x^2$, $g(x) = x+2$, $A = B = C = \mathbb{R}$

(d) $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $A = C = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(e) $f(x) = (x+2)^2, g(x) = \dfrac{1}{x}$, $A = \mathbb{R} - \{-2\}$, $B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $C = \mathbb{R}$

Exercice 13

Composition de fonctions III. Dans tout l'exercice, on note les ensembles de définition de la façon suivante, $g \circ f : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$.

(a) $g(f(x)) = g(x+5) = (x+5)^2$, avec $A = B = C = \mathbb{R}$.

(b) $g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 5$, avec $A = B = C = \mathbb{R}$.

(c) $g(f(x)) = g(x+1) = \frac{1}{x+1}$, avec $A = \mathbb{R} - \{-1\}, B = R^*, C = \mathbb{R}$.

(d) Remarquons d'abord que $g(y) = y^2 - 2y + 1 = (y-1)^2$. Donc $g(f(x)) = g(x-1) = (x-1-1)^2 = (x-2)^2$, avec $A = B = C = \mathbb{R}$.

(e)
- $f(g(1)) = f(3+2) = f(5) = 25 - 1 = 24$
- $g(f(1)) = g(1-1) = g(0) = 2$
- $f(g(-2)) = f(-6+2) = f(-4) = 16 - 1 = 15$
- $f(g(-3)) = f(-9+2) = f(-7) = 49 - 1 = 48$
- $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(-1) = -3 + 2 = -1$
- $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(6+2) = f(8) = 64 - 1 = 63$
- $(g \circ f)(0.5) = g(f(0.5)) = g(0.25 - 1) = g(-0.75) = -\frac{9}{4} + \frac{8}{4} = -\frac{1}{4}$
- $(g \circ f)(8) = g(f(8)) = g(63) = 3 \cdot 63 + 2 = 191$