Cours Euler: Série 21

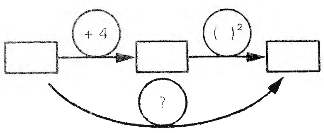
4 février 2026

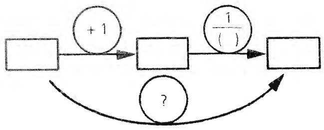
Exercice 1

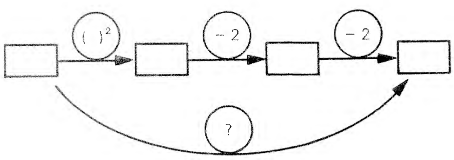
Composition de fonctions I. Considère les paires ou triplets de fonctions suivantes. Commence par trouver des ensembles maximaux pouvant remplir les rectangles de sorte que les fonctions soient définies, puis détermine la fonction composée.
Par exemple, on a la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x+3$ et la fonction $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \sqrt{x}$. La composition de ces deux fonctions semble être $\sqrt{x+3}$, mais cette formule a un sens à condition que $x+3 \geq 0$. Donc pour pouvoir composer ces deux fonctions je dois restreindre les ensembles de départ et d'arrivée de f et considérer

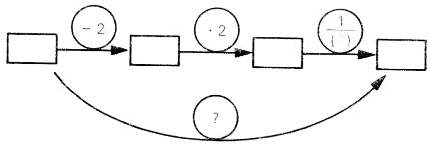
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_+ \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

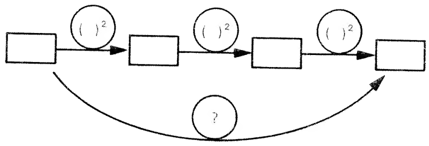
La fonction composée est alors bien $(g \circ f)(x) = \sqrt{x+3}$.

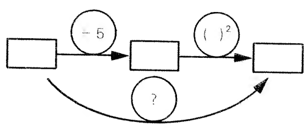
1)


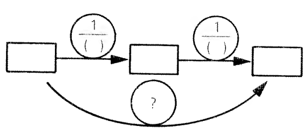
2)


3)


4)


5)


6)


7)


Exercice 2

Composition de fonctions II. Trouve deux fonctions $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ telles que $(g \circ f)(x)$ s'écrive comme suit (ni f, ni g ne doivent être l'identité). Pour ton choix de fonctions f et g, détermine $A, B, C \subset \mathbb{R}$ maximaux tels que $g \circ f$ est définie. Si par exemple on doit obtenir la fonction $\dfrac{1}{x^2-2}$, alors on peut poser $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Pour que $g(x)$ soit bien défini il faut que x soit non nul, si bien que pour composer f et g nous devons avoir $x^2 - 2 \neq 0$. Finalement les choix à faire sont les suivants

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & x^2 - 2 \end{array} \quad \text{et} \quad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \dfrac{1}{y} \end{array}$$

1) $(x+2)^2$

2) $\dfrac{1}{x^2}$

3) $x^2 + 2$

4) $\dfrac{1}{x^2+2}$

5) $\dfrac{1}{(x+2)^2}$

Exercice 3

Composition de fonctions III.

1) On considère les fonctions

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+5 \end{array} \quad \text{et} \quad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & y^2 \end{array}$$

Calcule la composition $g \circ f$. Est-elle définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ou faut-il restreindre à un sous-ensemble de $\mathbb{R}$? Dans ce cas, donne la fonction f restreinte avec ses nouveaux ensembles de départ et d'arrivée pour qu'on puisse la composer avec g.

2) Même question avec les fonctions x^2 et $y + 5$.

3) Même question avec les fonctions $x + 1$ et $\dfrac{1}{y}$.

4) Même question avec les fonctions $x - 1$ et $y^2 - 2y + 1$.

5) On considère les fonctions

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2-1 \end{array} \quad \text{et} \quad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & 3y+2 \end{array}$$

Calcule $f[g(1)]$, $g[f(1)]$, $f[g(-2)]$, $f[g(-3)]$, $(g \circ f)(0)$, $(g \circ f)(0{,}5)$, $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(8)$.

Exercice 4

FA48 Que d'accidents !

Voici un tableau indiquant le nombre d'accidents de la route ayant fait des victimes, de 1999 à 2009, dans les cantons de Vaud, du Valais et de Genève.

Années	Nombres d'accidents avec victimes
1999	4510
2000	4779
2001	4656
2002	4712
2003	4530
2004	4390
2005	3958
2006	3939
2007	4124
2008	3872
2009	3775

a) A l'aide d'un tableur, réalise un diagramme cartésien montrant l'évolution du nombre d'accidents ayant causé des victimes, de 1999 à 2009.

b) Que peux-tu dire de l'évolution du nombre d'accidents ?

c) Détermine la fonction affine qui passe par les conditions en 1999 et 2009. Est-elle une bonne approximation ?

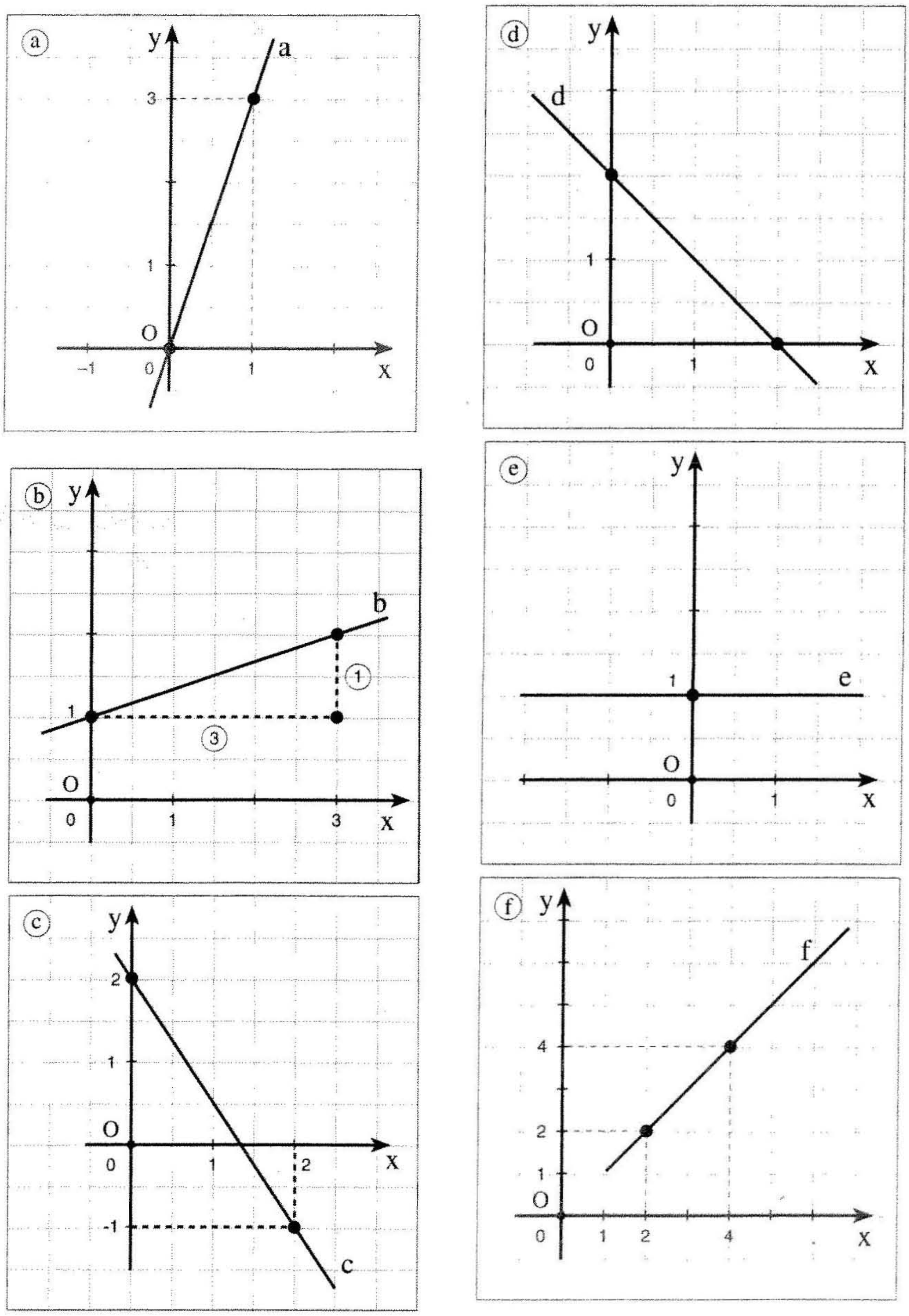
Exercice 5

Justifie !

380. Associe une équation à une droite dessinée :

1) $y = \dfrac{4-3x}{2}$ 3) $y = \frac{1}{3}x + 1$ 5) $y = 3x$

2) $y = -x + 2$ 4) $y = x$ 6) $y - 1 = 0$.



Exercice 6

Dessine les graphes des fonctions suivantes. Indique si ce sont des fonction affines constantes, linéaires ou générales (c'est-à-dire quelconques).
Détermine ensuite quels points parmi $A = (0;3)$, $B = (0;0)$, $C = (4;3)$, $D = (4;-2)$, $E = (-3;11)$ appartiennent au graphe de l'une ou l'autre de ces fonctions.

1) $\begin{array}{rcl} a\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -3x \end{array}$ 2) $\begin{array}{rcl} b\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -3x+2 \end{array}$ 3) $\begin{array}{rcl} c\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3}{4}x \end{array}$ 4) $\begin{array}{rcl} d\colon \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{3}{4}x-\frac{5}{4} \end{array}$

Exercice 7

1) On compare la longueur de plusieurs véhicules et celle de leur miniature réduites à la même échelle.

   a) Un camion mesure 1000 cm et son module réduit 2 cm. Etablis un tableau de correspondance des mesures en centimètres des cinq véhicules de l'exposition sachant que trois véhicules mesurent $800, 1200$ et 1500 cm, et qu'une miniature mesure 2,6 cm.
   b) Sur du papier quadrillé, dessine un système d'axes. Les abscisses représentent la longueur des miniatures en vraie grandeur (un centimètre sur la feuille représente un centimètre). Les ordonnées représentent la longueur des véhicules : 1/2 centimètre sur la feuille représente 200 cm. Reporte les cinq points dont tu as trouvés les coordonnées en (a).
   c) Trouve une formule qui exprime la longueur y des véhicules en fonction des longueurs x des miniatures. Prolonge alors le graphe esquissé (b).

2) La société de taxis « Besson » affiche ses prix. Pour la prise en charge, 2,30 et ensuite 1,10 par kilomètre parcoru.

   a) Si x représente le nombre de kilomètres d'une course et y le prix de cette course, trouve une formule qui exprime y en fonction de x.
   b) Pour $x = 1$, $x = 2$, $x = 2{,}5$, $x = 3$ et $x = 3{,}5$, calcule le prix de la course.
   c) Esquisse le graphique qui exprime la correspondance entre x et y. Reporte les points trouvés en (b) et complète grâce à la formule trouvée en (a).
   d) Sur le graphe note les points A dont l'abscisse vaut 4 et B dont l'ordonnée vaut 8,9. Que représentent ces points en termes de kilomètres parcourus et de prix ?

Exercice 8

1) Une voiture a consommé 7,2 litres de carburant pour 120 km. Elle en consomme ensuite 14,4 pour les 220 km suivants. Cette situation est-elle décrite par un phénomène de proportionnalité ?

2) A 3 ans Jonas mesurait 85 cm. A 12 ans sa taille a doublé. Cette situation est-elle décrite par un phénomène de proportionnalité ?

3) Je laisse une lampe allumée durant toute la nuit (8 heures). Si je laisse trois lampes identiques allumées, la consommation électrique triplera. Cette situation est-elle décrite par un phénomène de proportionnalité ?

4) Comment calculer l'aire totale des faces d'un cube si l'on connaît la mesure de son arête. Trouve la fonction qui donne la réponse. Et comment calculer le volume de ce même cube ?

5) En période de soldes un magasin effectue un rabais de 25% sur tous ses prix. Trouve la fonction qui donne le nouveau prix en fonction du prix initial. Et la fonction qui redonne le prix initial en fonction du prix réduit ?

6) Sur une carte au $1: 50'000$ la distance mesurée entre deux sommets alpins est de 5 cm. Quelle est la distance réelle à vol d'oiseau entre ces deux sommets ?

7) Lors de la descente du Lauberhorn les coureurs partent de 2315 m pour arriver à 1290 m. Sur une carte au $1: 25'000$ la longueur de la course est de 17,3 cm. Quelle est la pente moyenne de cette descente ?

8) Que signifie le panneau routier en forme de triangle qui indique “12%" ? Et quelle route est plus raide, celle qui fait 12% ou celle qui mesure 12° ?

Exercice 9

1) Détermine la fonction affine dont le graphe passe par $(0; 3)$ et dont la pente vaut -2.

2) Détermine la fonction affine dont le graphe passe par $(2; 3)$ et $(-2; 1)$.

3) Détermine t si le point $(1; 4)$ appartient au graphe de la droite d'équation $y = 3x + t$.

4) Détermine k si la droite d'équation $y = kx + 3$ est parallèle à l'axe des x.

5) Détermine a si la droite d'équation $y = ax - t$ est perpendiculaire à la droite d'équation $y = 2x+1$.

6) Détermine le nombre s si $B = (5; \frac{s}{2})$ est un point de la droite d'équation $2x - 3y + 6 = 0$.

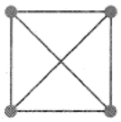
Exercice 10

L'équation d'une parabole. On considère la droite horizontale h d'équation $y = 2$ et le point F de coordonnées $(2; 1)$. On cherche à décrire la parabole qui est constituée des points équidistants de h et de F. Autrement dit on cherche le *lieu géométrique* des points P de coordonnées (x, y) tels que $d(P, h) = d(P, F)$. Trouve la fonction quadratique dont le graphe est cette parabole.

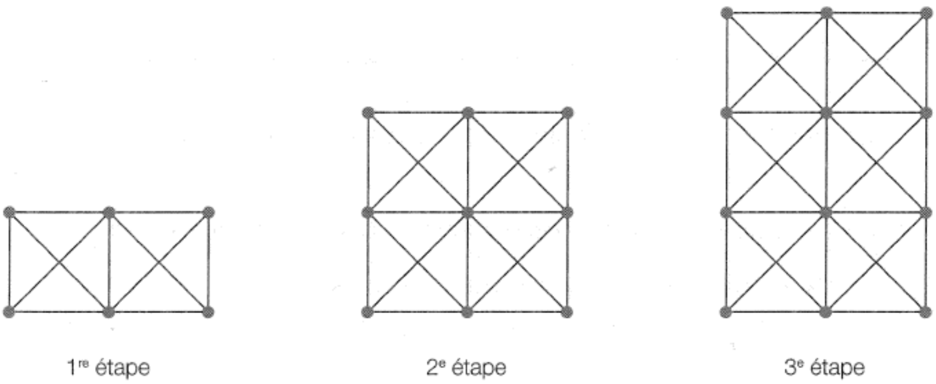
Indication. Simplifie-toi la vie en étudiant l'équation $d(P, h)^2 = d(P, F)^2$ et exprime l'ordonnée y en fonction de l'abscisse x.

Exercice 11 (Optionnel)

Un élément de ce motif est constitué d'un carré et de ses diagonales.



On les empile ainsi :

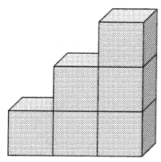


Combien comptera-t-on d'éléments de motif à la 10e étape ? A la 25e ? Et à la 2011e ?

Et de diagonales ? Et de points verts ?

Explique ta démarche.

On considère ensuite un escalier construit avec des cubes identiques. Celui-ci est haut de trois marches



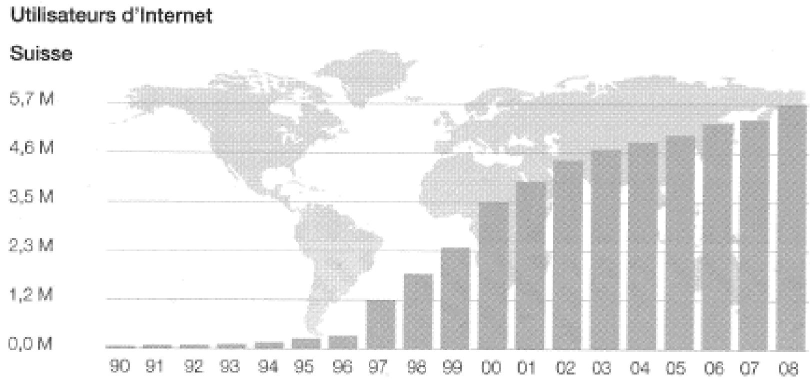
Combien faut-il de cubes pour construire un escalier de 1500 marches de hauteur ?

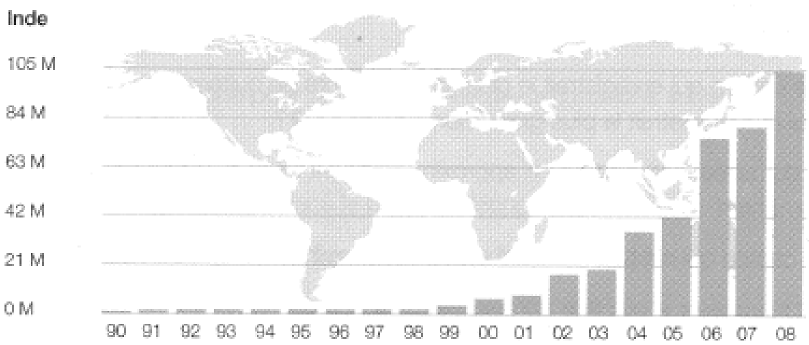
Exercice 12 (Optionnel)

FA54 Internet

Le diagramme en colonnes ci-dessous indique l'évolution du nombre d'utilisateurs d'Internet, en Suisse et en Inde, entre les années 1990 et 2008.

Unité : M = million





a) Estime par combien le nombre d'utilisateurs d'Internet a été multiplié, en Suisse et en Inde, entre 2003 et 2008. Comment, d'après toi, peut-on expliquer cette différence ?

b) Sachant que la population de la Suisse est d'environ 7,7 millions d'habitants en 2008, dirais-tu que beaucoup ou peu d'habitants de notre pays ont accès à Internet ? Justifie ta réponse.

c) Sachant que la population de l'Inde est d'environ 1,15 milliard d'habitants en 2008, dirais-tu que beaucoup ou peu d'habitants de ce grand pays d'Asie ont accès à Internet ? Justifie ta réponse.

d) En t'aidant des deux diagrammes, imagine le nombre d'utilisateurs d'Internet qu'il y aura en Suisse et en Inde en 2020, en justifiant ta réponse.

Exercice 13 (Optionnel)

Un exercice proposé par les Olympiades suisses de mathématiques (2015). Soient a, b et c des nombres naturels tels que a divise b^2, b divise c^2 et c divise a^2. Montrer que abc divise $a^7 + b^7 + c^7$.

Si tu aimes ce genre de problèmes, tu en trouveras plus sur le site des Olympiades suisses de mathématiques : `https://mathematical.olympiad.ch/fr/` !