Cours Euler: Série 20

7 février 2024

Remarque : Cette série ne sera pas à rendre, mais est importante pour la préparation du test. Le corrigé sera mis en ligne dans un deuxième temps. On se concentrera sur les exercices suivants (gardant les autres pour d'éventuels exercices supplémentaires) : ex. 1 2.2.3 ; ex. 3 ; ex. 5 ; ex. 7 ; ex. 9 ; ex. 13.

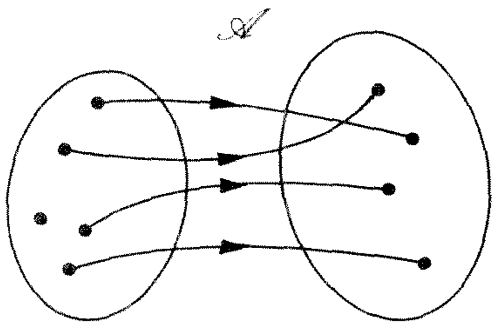
Exercice 1

Représentation schématique d'une fonction. Pour 2.2.3, lorsque ce n'est pas une fonction, indique quelle partie de la définition n'est pas vérifiée.

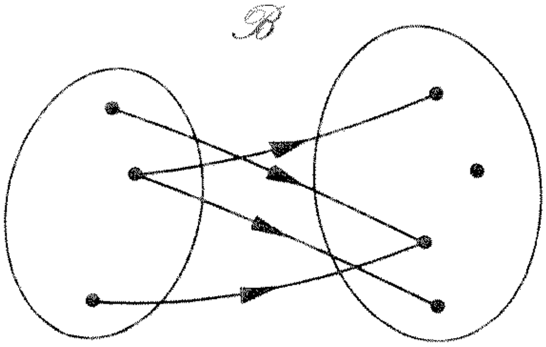
2.2.3.

Voici des schémas représentant des correspondances. Reconnaître lesquelles de celles-ci sont des fonctions. (Tous les éléments des ensembles et toutes les flèches sont notés.)

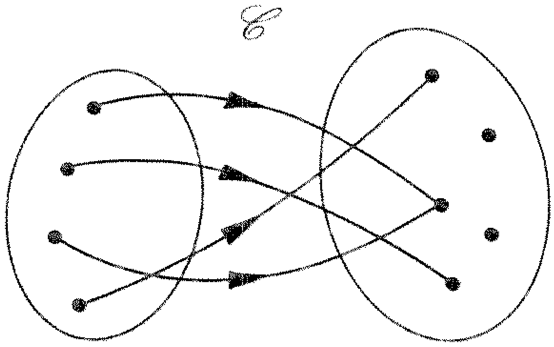
1)



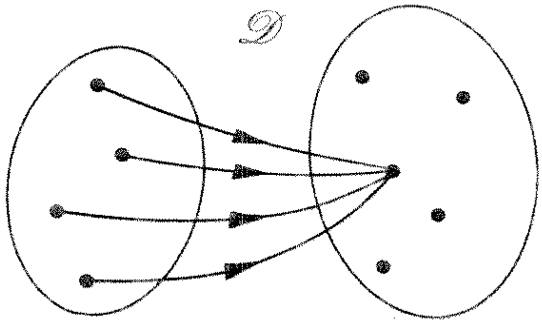
$\mathscr{B}$



$\mathscr{C}$

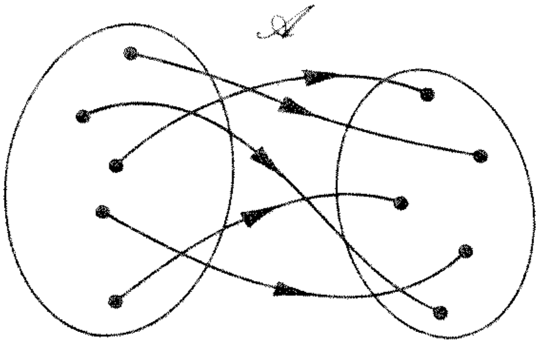


$\mathscr{D}$

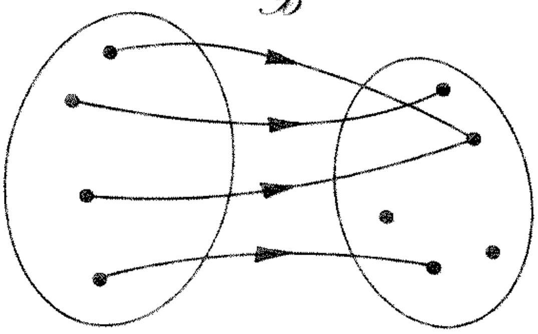


2)

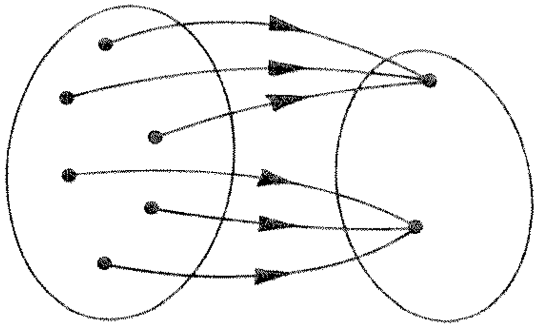
$\mathscr{A}$



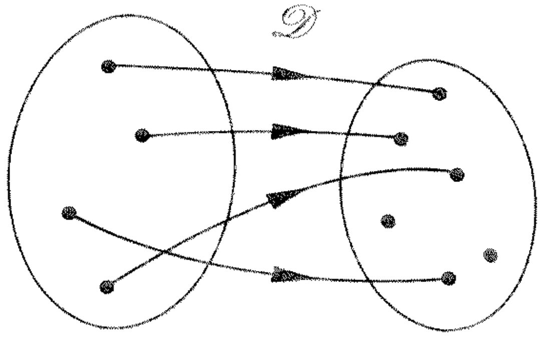
$\mathscr{B}$



$\mathscr{C}$

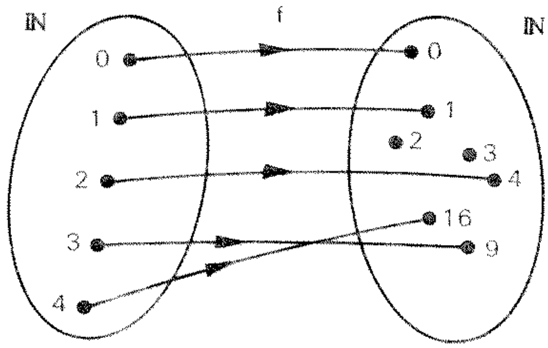


$\mathscr{D}$



2.2.4.

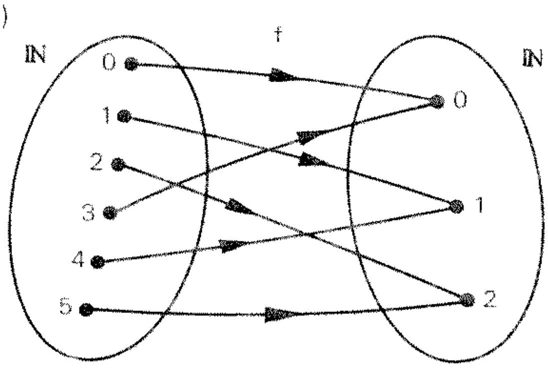
1) Dans le diagramme suivant on a dessiné quelques éléments de $\mathbb{N}$ et quelques-unes des flèches représentant une fonction f.



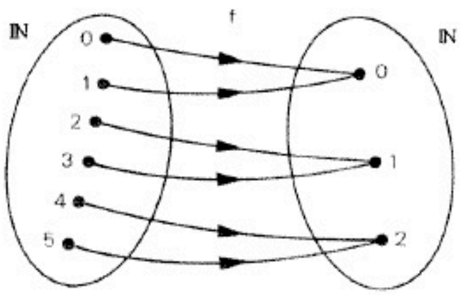
Quelle est l'image par f de 1 ? de 3 ? de 4 ?

Mêmes questions, si f est représentée par

2)



3)



2.2.5.

1) Soit l'ensemble A,

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

et la fonction f donnée par

$$\begin{aligned} f: \ & A \longrightarrow A \\ & a \longmapsto c \\ & b \longmapsto b \\ & c \longmapsto a \\ & d \longmapsto e \\ & e \longmapsto c. \end{aligned}$$

Quel est $f(a)$? $f(c)$? $f(d)$?

Mêmes questions si f est la fonction

2) $$\begin{aligned} f: \ & A \longrightarrow A \\ & a \longmapsto b \\ & b \longmapsto a \\ & c \longmapsto e \\ & d \longmapsto d \\ & e \longmapsto c \end{aligned}$$

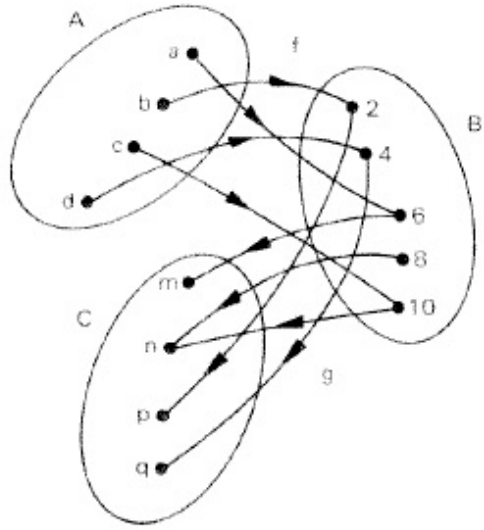
3) $$\begin{aligned} f: \ & A \longrightarrow \mathbb{N} \\ & a \longmapsto 1 \\ & b \longmapsto 2 \\ & c \longmapsto 3 \\ & d \longmapsto 4 \\ & e \longmapsto 5 \end{aligned}$$

2.2.6.

Soit les ensembles A, B et C

$$A = \{a, b, c, d\},$$
$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\},$$
$$C = \{m, n, p, q\},$$

et les fonctions f, de A dans B, et g, de B dans C, données par le diagramme suivant.



Quel est

1) $f(a)$? $f(c)$? $g(2)$? $g(10)$?

2) $f(b)$? $g(6)$? $f(d)$? $g(4)$? $g(8)$?

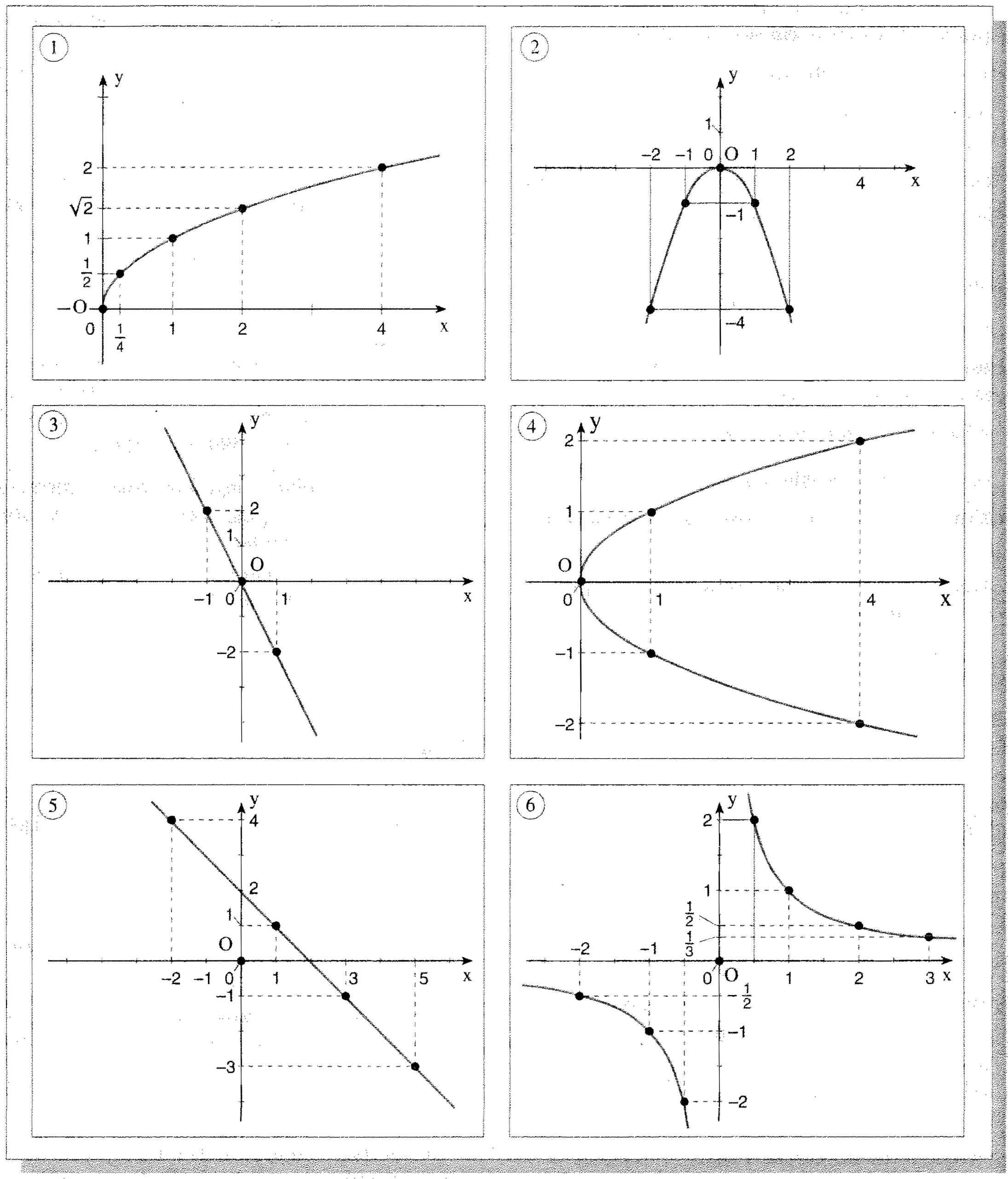
3) $g(f(d))$?

4) $g(f(a))$? $g(f(b))$? $g(f(c))$?

Exercice 2

Graphe de fonction I Sur la donnée.
Observe les graphiques dessinés ci-après.

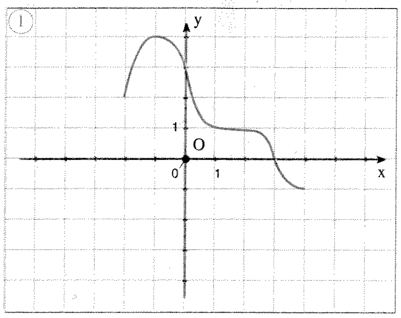
a Tente d'associer à chacun d'eux une des formules suivantes :
Ⓐ $\boxed{y = -2x}$; Ⓑ $\boxed{y^2 = x}$; Ⓒ $\boxed{y = \frac{1}{x}}$; Ⓓ $\boxed{y = -x^2}$; Ⓔ $\boxed{y = \sqrt{x}}$; Ⓕ $\boxed{y = -x + 2}$.

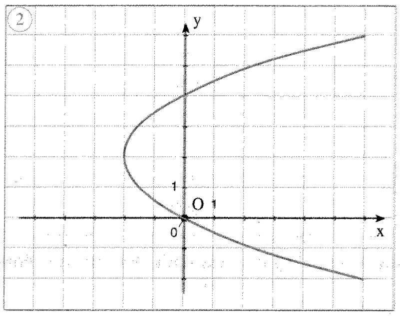


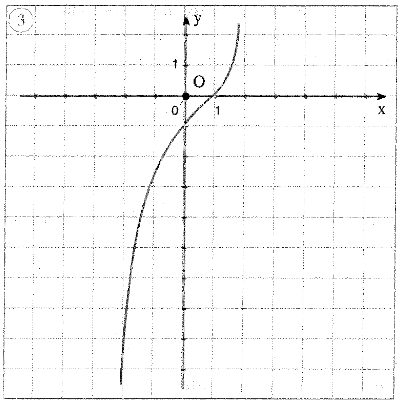
Quel graphe n'est pas celui d'une fonction ? Pourquoi ?

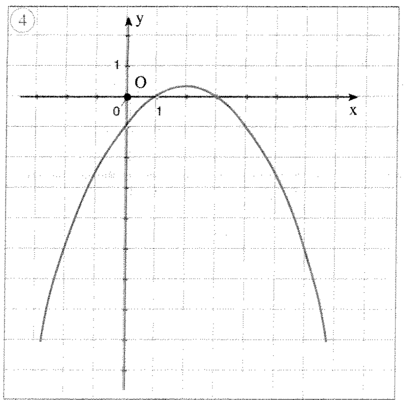
Exercice 3

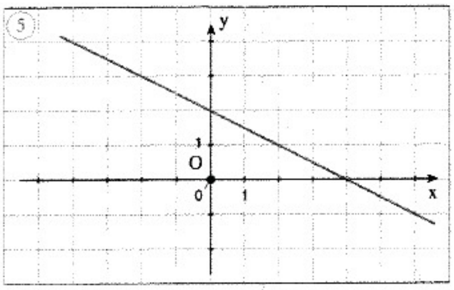
Graphe de fonction II.
Voici des représentations graphiques de « relations ». Lesquelles ne sont pas des fonctions ? Pourquoi ? Pour celles qui sont des fonctions, détermine l'image de -2, les préimages de -1, leur ordonnée à l'origine, leurs zéros.

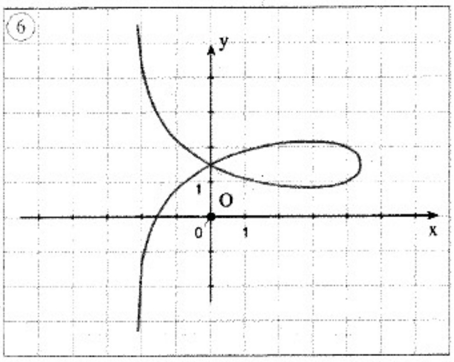












Exercice 4

FA9 La goutte qui fait déborder le vase

On verse de l'eau dans un vase à fleurs. Pour chaque quantité d'eau versée, on mesure la hauteur qu'elle atteint dans le vase. Les résultats sont inscrits dans ce tableau :

Volume d'eau en cl	40	80	120	160	200	240	280
Hauteur d'eau en mm	27	54	81	108	158	208	258

a) Etablis un graphique de la situation.

b) Trouve la hauteur d'eau correspondant à un volume de 50 cl, de 130 cl, de 260 cl.

c) Propose un croquis de ce vase.

Exercice 5

Injections/Surjections/Bijections I Pour chacune des associations suivantes, détermine, *en justifiant*, s'il s'agit d'une fonction et si c'est le cas, si elle est injective, surjective et/ou bijective.

1) « traverse » : {Rivières d'Europe} $\to$ {Villes d'Europe}.

2) $\mathrm{Id}_X : X \to X$

3) $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ est l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, $Y = \mathbb{N}$ et $f : X \to Y$ associe à tout sous-ensemble A de $\mathbb{N}$ le plus petit élément de l'ensemble A.

4) X est l'ensemble des suites de sept chiffres (p. ex. 0098704 en est une), Y est l'ensemble des téléphones du canton Vaud et $f : X \to Y$ est définie par $f(x)$ sonne si je compose le $021/x$ sur mon portable.

5) X est l'ensemble des voitures, Y est l'ensemble des habitants de cette planète et $f : X \to Y$ est définie par x était conduite par $f(x)$ hier à 13h30.

6) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est définie par $f(x)$ est le carré de x.

7) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est définie par x est le carré de $f(x)$.

8) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ est définie par x est le carré de $f(x)$.

9) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est définie par x est le carré de $f(x)$.

10) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par x est le cube de $f(x)$.

Exercice 6

Injections/Surjections/Bijections II
Déterminer si la fonction est injective, surjective ou bijective.

1) $$f : \{\text{élèves du cours Euler }\} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad x \longmapsto f(x) = \text{ âge de l'élève } x$$

2) $$g : \{\text{villes}\} \longrightarrow \{\text{pays}\}, \quad x \longmapsto g(x) = \text{pays auquel la ville } x \text{ appartient}$$

3) $$h : \{\text{capitales}\} \longrightarrow \{\text{pays}\}, \quad x \longmapsto h(x) = \text{pays dont la ville } x \text{ est la capitale}$$

4) $i\colon \{\text{élèves du cours Euler}\} \longrightarrow \{13, 14, 15\}$
$x \longmapsto i(x) = \text{ âge de l'élève } x$

5) $ASCII\colon \{\text{256 caractères}\} \longrightarrow \{\text{nombres binaires à 8 chiffres}\}$
$x \longmapsto ASCII(x) = \text{code binaire à 8 chiffres du caractère } x$

6) $T\colon \{\text{minutes d'un jour}\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto T(x) = \text{température à la minute } x$

7) $j\colon \{\text{élèves possédant un natel}\} \longrightarrow \{\text{numéros à 10 chiffres}\}$
$x \longmapsto j(x) = \text{numéro de natel de l'élève } x$

8) $k\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto k(x) = 2 \cdot x$

Exercice 7

Un peu de théorie.

1) On travaille avec les ensembles $A = \{a, b, c, d\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Les sous-ensembles suivants du produit cartésien $A \times B$ sont-ils le graphe d'une fonction $f\colon A \to B$? Sinon, pourquoi ?
   a) $G_f = \{(a, 2); (c, 5); (b, 2); (d, 9)\}$
   b) $G_f = \{(b, 6); (d, 5); (a, 1); (b, 9)\}$
   c) $G_f = \{(b, 6); (d, 5); (a, 1); (b, 9); (c, 6)\}$

2) Parmi les fonctions suivantes de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$, lesquelles sont des bijections ? Explique !

   a) $f(a) = a + 4$
   b) $f(a) = 4a$
   c) $f(a) = a^2$
   d) $f(a) = -a$
   e) $f(a)$ est le reste de la division par 10
   f) $f(a) = a^3$
   g) $f(a) = \mid a \mid$

Exercice 8

Un problème géométrique.
On considère un rectangle de base x et de hauteur y dont l'aire vaut 10cm^2. On fait varier x et on se demande alors comment varie y sachant que l'aire reste inchangée.

1) Dresse un tableau de correspondance entre x et y lorsque x prend les valeurs $0,5$ cm, 1 cm, 3 cm, 5 cm, 10 cm.

2) Trouve une formule qui exprime y en fonction de x. Ceci détermine une fonction (pour quelles valeurs de x cela a-t-il un sens géométrique) ?

3) Reporte les points trouvées en (1) dans un système d'axes (sur du papier quadrillé) et complète cette représentation en esquissant proprement et soigneusement le graphe de la fonction (qui traduit la variation de la hauteur en fonction de la base).

Exercice 9

Quelques fonctions. Dessine le graphe de chacune des fonctions suivantes. Détermine pour commencer l'ensemble de définition de chaque fonction Fais bien attention au signe de $f(x)$ (quand la fonction prend-elle des valeurs positives ?). Tu peux t'aider d'une machine à calculer ou d'un ordinateur, de manière intelligente en vérifiant si la machine donne une réponse compatible avec l'ensemble de définition !

1. $f(x) = \sqrt{x^2}$
2. $g(x) = \sqrt[3]{x}$
3. $h(x) = \dfrac{12}{x}$
4. $k(x) = \sqrt{16 - x^2}$
5. $l(x) = \dfrac{2x+3}{3x-6}$

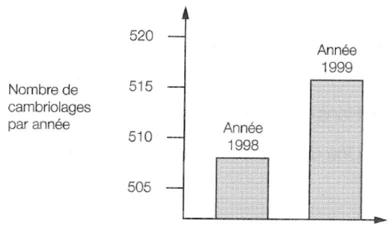
Exercice 10

FA51 Cambriolages

Lors d'une émission télévisée, un journaliste montre ce graphique et dit :

« Ce graphique montre qu'il y a eu une très forte augmentation du nombre de cambriolages entre 1998 et 1999. »

Considères-tu que l'affirmation du journaliste est une interprétation correcte de ce graphique ? Justifie ta réponse.



Exercice 11

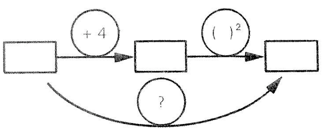
Composition de fonctions I. Considère les paires ou triplets de fonctions suivantes. Commence par trouver des ensembles maximaux pouvant remplir les rectangles de sorte que les fonctions soient définies, puis détermine la fonction composée.

Par exemple, on a la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x+3$ et la fonction $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \sqrt{x}$. La composition de ces deux fonctions semble être $\sqrt{x+3}$, mais cette formule a un sens à condition que $x+3 \geq 0$. Donc pour pouvoir composer ces deux fonctions je dois restreindre les ensembles de départ et d'arrivée de f et considérer

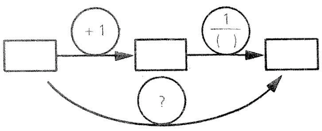
$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_+ \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

La fonction composée est alors bien $(g \circ f)(x) = \sqrt{x+3}$.

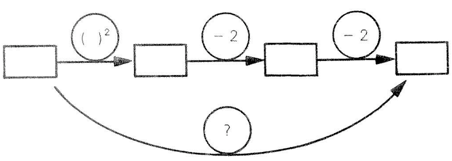
1)



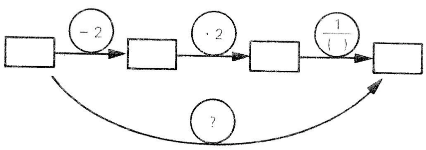
2)



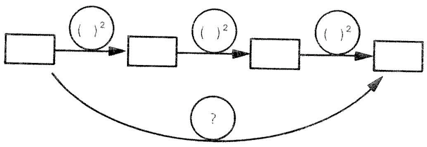
3)



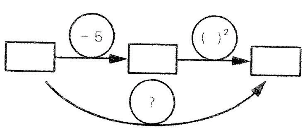
4)



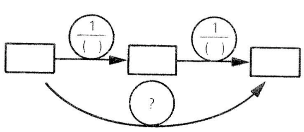
5)



6)



7)



Exercice 12

Composition de fonctions II.
Trouve deux fonctions $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ telles que $(g \circ f)(x)$ s'écrive comme suit (ni f, ni g ne doivent être l'identité). Pour ton choix de fonctions f et g, détermine $A, B, C \subset \mathbb{R}$ maximaux tels que $g \circ f$ est définie. Si par exemple on doit obtenir la fonction $\frac{1}{x^2-2}$, alors on peut poser $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Pour que $g(x)$ soit bien défini il faut que x soit non nul, si bien que pour composer f et g nous devons avoir $x^2 - 2 \neq 0$. Finalement les choix à faire sont les suivants

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & x^2 - 2 \end{array} \quad \text{et} \quad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \frac{1}{y} \end{array}$$

1) $(x+2)^2$
2) $\frac{1}{x^2}$
3) $x^2 + 2$
4) $\frac{1}{x^2+2}$
5) $\frac{1}{(x+2)^2}$

Exercice 13

Composition de fonctions III.

1) On considère les fonctions

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + 5 \end{array} \quad \text{et} \quad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & y^2 \end{array}$$

Calcule la composition $g \circ f$. Est-elle définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ou faut-il restreindre à un sous-ensemble de $\mathbb{R}$? Dans ce cas, donne la fonction f restreinte avec ses nouveaux ensembles de départ et d'arrivée pour qu'on puisse la composer avec g.

2) Même question avec les fonctions x^2 et $y + 5$.

3) Même question avec les fonctions $x + 1$ et $\frac{1}{y}$.

4) Même question avec les fonctions $x - 1$ et $y^2 - 2y + 1$.

5) On considère les fonctions

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 1 \end{array} \quad \text{et} \quad g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & 3y + 2 \end{array}$$

Calcule $f[g(1)]$, $g[f(1)]$, $f[g(-2)]$, $f[g(-3)]$, $(g \circ f)(0)$, $(g \circ f)(0{,}5)$, $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(8)$.

A partir d'ici les exercices sont des problèmes de test d'autres années. Gardez-les pour vous entraîner quand vous êtes prêts. Ces exercices ne seront pas corrigés.

Exercice 14 (Optionnel)

Les nombres réels. (21 points) On lit dans le journal Le Monde du 15 février : Cérès est une planète naine, orbitant dans la ceinture d'astéroïdes entre Mars et Jupiter, à environ 360 millions de kilomètres du Soleil. Son diamètre est de 950 kilomètres, et elle représente le tiers de la masse de la ceinture d'astéroïdes. Dans le journal Science du 17 février, des chercheurs italiens et américains de la NASA et de l'Institut d'astrophysique et de planétologie spatiale de Rome (IAPF) expliquent y avoir détecté, pour la première fois, la présence de molécules organiques.

(1) (16 points) Sachant que la vitesse de la lumière vaut 300'000'000 m/s (mètres par seconde), calcule le temps qu'il faut, en minutes, pour qu'un rayon de Soleil parvienne sur Cérès.
(2) (5 points) L'orbite de Cérès autour du Soleil n'est pas circulaire et sa distance maximale au Soleil est $414'103'605,89742368584$ km. Approxime ce nombre au centième.

Exercice 15 (Optionnel)

Egalité de polynômes. (12 points) On travaille dans $\mathbb{R}[x]$. Calcule toutes les valeurs possibles des nombres réels a et b pour que les polynômes $p = x^2 + (3-a)x - 7$ et $q = (x-b)(x+b)$ soient égaux.

Exercice 16 (Optionnel)

Réduction de monômes et de polynômes. (21 points)
(1) (6 points) Dans $\mathbb{R}[x, y]$ quels sont les degré et coefficient du monôme $-3xyx(\sqrt{3}\,x^2y^3)(-\sqrt{5}\,x)$?
(2) (5 points) Dans $\mathbb{Z}[x, y, z]$ écris le polynôme $(2x+3y)(3x-2y)$ sous forme réduite.
(3) (10 points) Dans $\mathbb{R}[x]$ écris le polynôme $(x+3)(x+3)(1-x)(x-2)$ sous forme ordonnée et réduite.

Exercice 17 (Optionnel)

Un peu de théorie. (28 points)

(1) (5 points) Donne la définition de $x^{-\frac{11}{4}}$ en termes de puissances et de racines. Pour quelles valeurs de x cette expression a-t-elle un sens ?
(2) (8 points) Démontre que $\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}$ pour tous les nombres réels x et y en te basant sur des propriétés des puissances entières.
(3) (15 points) Démontre que $\sqrt{7}$ n'est pas un nombre rationnel. Il n'est pas nécessaire de démontrer les propriétés de divisibilité utilisées.

Exercice 18 (Optionnel)

Vrai ou Faux (20 points) Justifie brièvement chaque réponse.
(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\sqrt[4]{x^4} = | x |$.
(2) On a $\sqrt{13} > 3{,}5$.
(3) Il existe un polynôme $p \in \mathbb{R}[x]$ tel que $p^2 = x^2 + 6x + 9$.
(4) Il existe un polynôme $p \in \mathbb{R}[x]$ tel que $p^2 = x + 100$.

Exercice 19 (Optionnel)

Simplification. Ecris le nombre réel $\dfrac{5}{\sqrt[7]{125}\sqrt[7]{5}}$ en faisant disparaître les racines du dénominateur.