

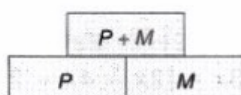
# Cours Euler: Série 19

31 janvier 2024

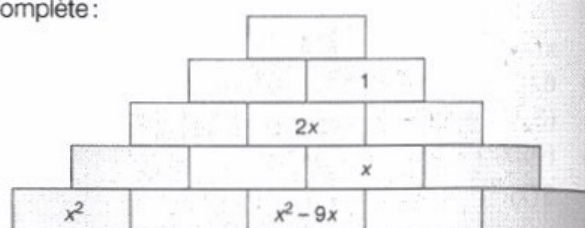
## Exercice 1

### 42. Faire le mur

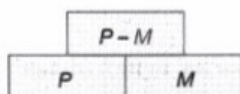
a) On passe d'un étage à l'autre en appliquant la règle suivante :



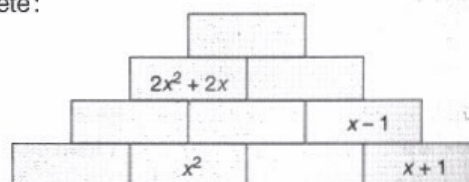
Complète :



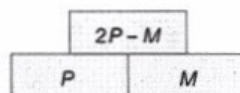
b) Ici, la règle devient :



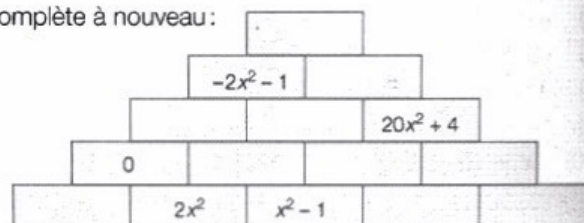
Complète :



c) Et ici :



Complète à nouveau :



## Exercice 2

1) Parmi les expressions suivantes, lesquels sont des polynômes ?

$$\pi x^2, \frac{4}{x}, x^3 + x^2 + x + 1, \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}, 2^x + 2, \sqrt[4]{x}$$

2) Considérons l'algèbre de polynôme  $\mathbb{R}[x]$ . Soient  $a, b, c$  des nombres réels (et non des indéterminées!). Considérons  $f, g, h \in \mathbb{R}[x]$  les polynômes suivants :

$$f = ax^2 + bx + c, \quad g = 5x + 2, \quad h = 9x^2 - 5$$

Pour quels nombres réels  $a, b, c$  est-ce que :

- a)  $f = g$  ?
- b)  $f = g + h$  ?
- c)  $f = g^2$  ?
- d)  $bx + c = h$  ?

3) On travaille dans  $\mathbb{Q}[x]$ . Calcule la valeur des nombres rationnels  $a, b, c$ , s'ils existent, tels que

$$(x - 1)(x + a)(x + 1) = x^3 + 2x^2 + bx + c$$

4) Considérons maintenant l'algèbre de polynômes  $\mathbb{Q}[x, y]$ . Soient  $f, g, h \in \mathbb{Q}[x, y]$  les polynômes suivants, où  $a, b, c, d, r, s$  sont des nombres rationnels :

$$f = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ry + s, \quad g = 9xy - 6x^2 + 5, \quad h = -7x - 5y$$

Pour quels nombres réels  $a, b, c, d, r, s$  est-ce que :

- a)  $f = g$  ?
- b)  $f = g + h$  ?
- c)  $f = h^2$  ?
- d)  $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ry = g$  ?

### Exercice 3

**Partie A.** Réduis les expressions suivantes :

- |                            |                              |                        |
|----------------------------|------------------------------|------------------------|
| 1) $a(ab)$                 | 6) $-y \cdot y \cdot (-y)$   | 11) $x + 8z$           |
| 2) $2xy(3xy)$              | 7) $(-r)(-t)(-4)$            | 12) $4m + 3m - 2m$     |
| 3) $-2v \cdot 5v$          | 8) $(6c)^2$                  | 13) $8y - 8y$          |
| 4) $6m \cdot 6mn$          | 9) $(2a^2)^3$                | 14) $1,5z + 3z + 4,5z$ |
| 5) $\frac{c}{2} \cdot 20c$ | 10) $(4 \cdot 4)(5 \cdot 5)$ | 15) $3x + 4 + x - 5$   |

**Partie B.** Voici quatre monômes  $A = 3x^2$ ,  $B = -\frac{x}{3}$ ,  $C = 12$  et  $D = 12x^3$ . Donne le résultat sous forme réduite et ordonnée.

- |            |               |                     |
|------------|---------------|---------------------|
| 1) $AB$    | 3) $D - 4A$   | 5) $(A + B)(A - B)$ |
| 2) $A + B$ | 4) $AC + B^2$ | 6) $CD - AB$        |

**Exercice 4**

**Partie A.** On travaille avec l'algèbre de polynômes  $\mathbb{R}[x, y]$  et  $a, b \in \mathbb{R}$  (attention : dans cet exercice  $a$  et  $b$  sont des nombres réels et non des indéterminées). Réduis et indique leur degré.

1)  $y^3 3^{-4} x^5 3 a^5 y^4 y^3$

4)  $\left[ \left( a^{\frac{1}{2}} x^2 \right) (3a^2 x) \right]^2$

2)  $(a^2 b^3)^{-5} (5b^3)^2$

3)  $3(x^2 y^6)(y^3 x) y^5$

5)  $3a^2(4x)(a^0)^2$

**Partie B.** On travaille dans l'algèbre  $\mathbb{Q}[x, y]$ . Réduis les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables. Puis ordonne par rapport à l'indéterminée  $x$  et indique le degré.

1)  $(x + y)^2$

4)  $(x + 1)^3$

2)  $(2x - 5)^2$

5)  $(2x - 3y)^2$

3)  $(3 - x) \cdot (3 + x)$

6)  $4x \cdot (x + 2)^2$

**Partie C.** On travaille dans l'algèbre  $\mathbb{Z}[x, y, z]$ . Réduis les expressions suivantes en utilisant la distributivité et les identités remarquables, lorsqu'elles s'appliquent. Puis ordonne dans l'ordre croissant et indique le degré du polynôme.

1)  $(x + 2) \cdot (x + 5)$

6)  $(x + y) \cdot (x + y + z)$

2)  $(x + y) \cdot (x - y)$

7)  $(x^2 + y^2) \cdot (x + y) \cdot (x - y)$

3)  $2x \cdot (y - 3) \cdot (y + 2)$

8)  $-5x \cdot (x - 2)^2 \cdot x^2$

4)  $-5 \cdot (x^2 + x + 2)$

9)  $(x + y + z)^2$

5)  $(2x + 1) \cdot (x + 5) \cdot (-x - 2)$

10)  $(x + y - z)^2$

**Exercice 5**

**Partie A.** Dans les calculs ci-dessous on a réduit les polynômes en plusieurs étapes. Indique pour chaque égalité quelle propriété des anneaux commutatifs a été utilisée (sans oublier quelle opération elle concerne).

1)  $x + (5x - 3) = (x + 5x) - 3 = (1 + 5)x - 3 = 6x - 3$

2)  $x \cdot (ax) = x \cdot a \cdot x = a \cdot x \cdot x = ax^2$

3)  $-x - (-x - x) = -x + x + x = (-1 + 1 + 1)x = 1 \cdot x = x$

4)  $25 \cdot 9x \cdot [-2x \cdot (x \cdot 2)] = 25 \cdot 9 \cdot x \cdot (-2) \cdot x \cdot x \cdot 2 = 25 \cdot 9 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x = -900x^3$

5)  $(x + 2y - 3) \cdot x - 2x^2 + 3x = x^2 + 2xy - 3x - 2x^2 + 3x = x^2 - 2x^2 - 3x + 3x + 2xy = -x^2 + 2xy$

**Partie B.** Réduis les polynômes suivants en utilisant dans l'ordre indiqué les propriétés d'associativité (a), de commutativité (c) et de distributivité (d).

1) (a, c) :  $25 \cdot (-x) \cdot (2yx) \cdot (-3) \cdot [y^2 \cdot (-x)]$

2) (d, c, d) :  $-(2x - 5y + 2) + 5x^2 - 7(x + 2y)$

**Exercice 6**

**Partie A.** On travaille avec l'algèbre  $\mathbb{Z}[x, y, a, b]$ . Réduis les polynômes suivants. Ordonne et indique le degré. Donne la liste des termes de chaque polynôme.

- 1)  $2x + 3y - 5x + 8 - 6y$
- 2)  $19 - 2x^2 + 3x - 20 + 2x^2 - 6x + 3x^3$
- 3)  $y - x - x^2 - y^2 + 3y - 5x + xy$
- 4)  $ab + a^2 - 2b + 3ba + 4a^2b - 2a^2$

**Partie B.** On travaille avec l'algèbre  $\mathbb{Z}[x, y, z, a, b, c]$ . Réduis les polynômes suivants. Ordonne globalement, puis par rapport à chaque indéterminée séparément. Indique le degré.

- 1)  $2y^2 + 3x - 5x - 8y + 7xy - x^2y + 8x \cdot 5y$
- 2)  $(3x)^2 - 5yx + 6x^2 - (5x) \cdot (3y) + 2y^2x$
- 3)  $2a^2b - (ab)^2 - 5ab^2 + 2a^2 \cdot 3b^2$
- 4)  $(z^2x)(2x) - (3zx)^2 + (6x^2) \cdot z^2$
- 5)  $ab^2c + 4cb^2a - (2b) \cdot a \cdot 5c \cdot b + 6a^2bc - abc$

**Partie C.** On travaille dans  $\mathbb{R}[x, y, z]$ . Ecris le polynôme suivant sous forme réduite, indique son degré et la partie littérale de chaque terme.

$$(x + y^2z)xyz(2x - 2zx) + 2(x^2y^3z^3 - x^2yz)$$

**Exercice 7**

On travaille dans l'algèbre de polynôme  $\mathbb{R}[x, y, z]$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . Réduis, ordonne et indique le degré.

- 1)  $(x^2 + 2x - 5) - (3x - 6 + 3x^2)$
- 2)  $(y - 5 + y^2) - (8 + y^2 + y)$
- 3)  $-(z^2 + (3z)^2 - 2.4z + b + \pi z)$
- 4)  $z^3 - (z^4 - (ya)^2 + 3 \cdot (z + y^2))$
- 5)  $y + 2xy - \frac{4}{7}(5x - \frac{3}{27}) - (x + 2.5)$

**Exercice 8**

**2.2.7.** Dans  $\mathbb{N}^*$  cherche l'image par la fonction  $f$  des nombres 1, 8, 16, 35 et 100 lorsque  $f$  est la fonction qui associe à tout nombre entier

- 1) le nombre qui le suit dans la suite croissante des nombres entiers,
- 2) son triple,
- 3) son double diminuée de 1,
- 4) le plus grand carré parfait (carré d'un nombre entier) qui lui est inférieur ou égal,
- 5) son ppmc avec 20,
- 6) le nombre de ses chiffres (écrit en base 10),
- 7) le plus petit multiple de 7 qui lui est supérieur ou égal.

Donne tes réponses (sans justification) dans un tableau à double entrée avec 5 lignes pour les 5 nombres proposés et 7 colonnes pour les 7 fonctions données.

**2.2.8.** Même problème pour  $f(1), f(8), f(20), f(63)$  et  $f(100)$  pour la fonction  $f$  qui associe à tout nombre naturel

- 1) son carré,
- 2) le reste de la division par 7,
- 3) le nombre de ses diviseurs,
- 4) son pgdc avec 60,
- 5) le plus petit nombre premier qui lui est supérieur,
- 6) le nombre de ses multiples dans  $\mathbb{N}^*$  inférieurs (strictement) à 100,
- 7) le nombre des nombres premiers qui lui sont inférieurs (strictement).

### Exercice 9

- 1) Soit  $E = \{a, b, c\}$  et  $F = \{g, h\}$  deux ensembles. Trouver toutes les fonctions de  $E$  dans  $F$  (en donnant pour chacune d'elles l'image de *chaque* élément de l'ensemble de départ).
- 2) Même exercice pour  $E = \{a, b\}$  et  $F = \{g, h, j\}$ .
- 3) Même exercice pour  $E = \{a, b\}$  et  $F = \{g, h\}$ .
- 4) Combien existe-t-il de fonctions de  $E$  dans  $F$  lorsque  $E = \{a, b, c, d, e, f\}$  et  $F = \{g, h\}$ ? Il n'est pas nécessaire de donner la liste de toutes les fonctions, un argument de comptage (combinatoire) suffit!
- 5) Même exercice pour  $E = \{a, b, c\}$  et  $F = \{g, h, j, k\}$ .
- 6) Même exercice pour  $E = \{a, b\}$  et  $F = \{g, h, j, k, l, m\}$ .