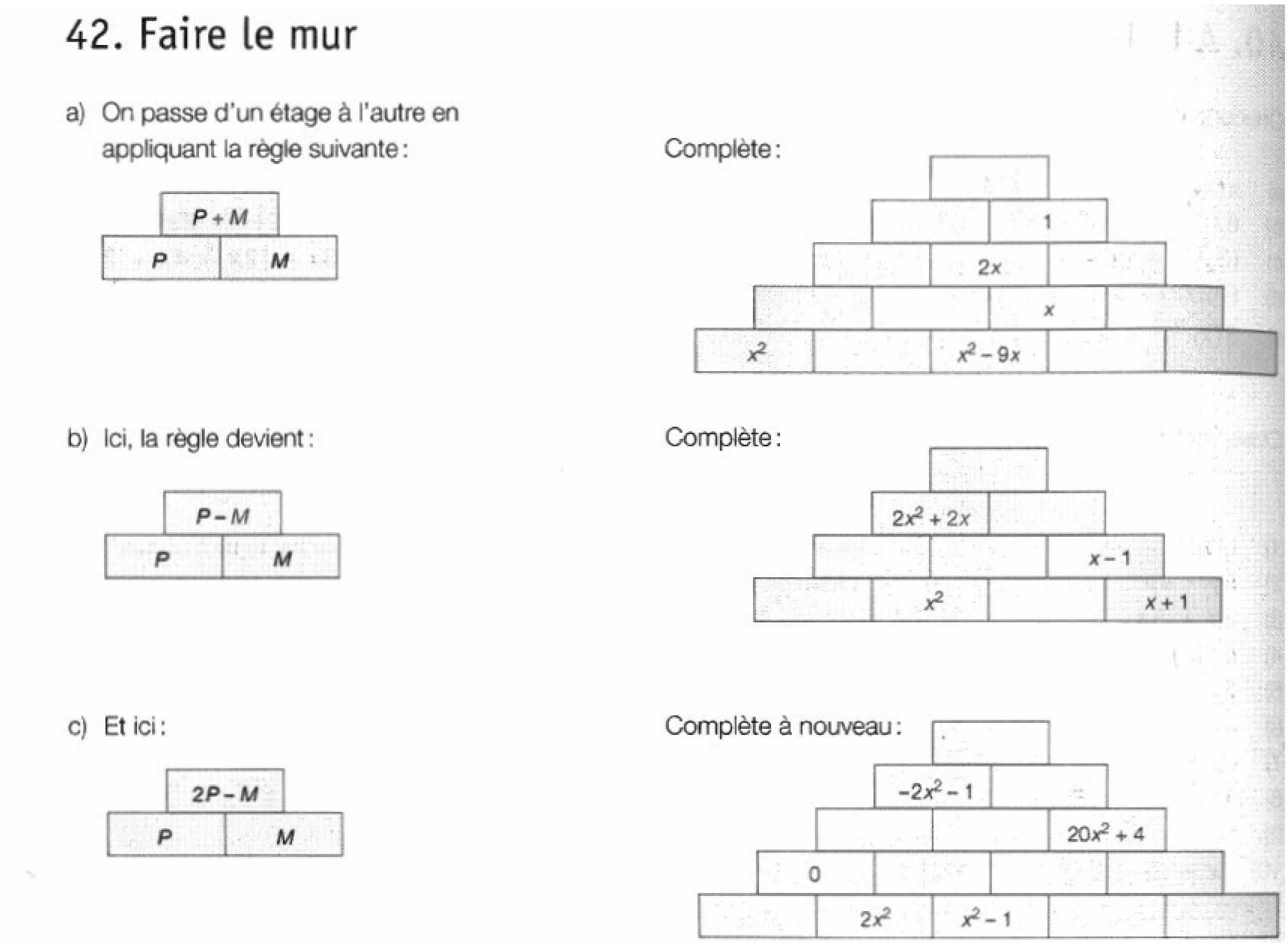
Cours Euler: Série 19

22 janvier 2025

Exercice 1



Exercice 2

1) Parmi les expressions suivantes, lesquels sont des polynômes ?

$$\pi x^2, \quad \frac{4}{x}, \quad x^3 + x^2 + x + 1, \quad \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}, \quad 2^x + 2, \quad \sqrt[4]{x}$$

2) Considérons l'algèbre de polynôme $\mathbb{R}[x]$. Soient a, b, c des nombres réels (et non des indéterminées !). Considérons $f, g, h \in \mathbb{R}[x]$ les polynômes suivants :

$$f = ax^2 + bx + c, \quad g = 5x + 2, \quad h = 9x^2 - 5$$

Pour quels nombres réels a, b, c est-ce que :

a) $f = g$?

b) $f = g + h$?

c) $f = g^2$?

d) $bx + c = h$?

3) On travaille dans $\mathbb{Q}[x]$. Calcule la valeur des nombres rationnels a, b, c, s'ils existent, tels que

$$(x-1)(x+a)(x+1) = x^3 + 2x^2 + bx + c$$

4) Considérons maintenant l'algèbre de polynômes $\mathbb{Q}[x, y]$. Soient $f, g, h \in \mathbb{Q}[x, y]$ les polynômes suivants, où a, b, c, d, r, s sont des nombres rationnels :

$$f = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ry + s, \;\; g = 9xy - 6x^2 + 5, \;\; h = -7x - 5y$$

Pour quels nombres réels a, b, c, d, r, s est-ce que :

a) $f = g$?

b) $f = g + h$?

c) $f = h^2$?

d) $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ry = g$?

Exercice 3

Partie A. Réduis les expressions suivantes :

1) $a(ab)$

2) $2xy(3xy)$

3) $-2v \cdot 5v$

4) $6m \cdot 6mn$

5) $\dfrac{c}{2} \cdot 20c$

6) $-y \cdot y \cdot (-y)$

7) $(-r)(-t)(-4)$

8) $(6c)^2$

9) $(2a^2)^3$

10) $(4 \cdot 4)(5 \cdot 5)$

11) $x + 8z$

12) $4m + 3m - 2m$

13) $8y - 8y$

14) $1{,}5z + 3z + 4{,}5z$

15) $3x + 4 + x - 5$

Partie B. Voici quatre monômes $A = 3x^2$, $B = -\dfrac{x}{3}$, $C = 12$ et $D = 12x^3$. Donne le résultat sous forme réduite et ordonnée.

1) AB

2) $A + B$

3) $D - 4A$

4) $AC + B^2$

5) $(A + B)(A - B)$

6) $CD - AB$

Exercice 4

Partie A. On travaille avec l'algèbre de polynômes $\mathbb{R}[x, y]$ et $a, b \in \mathbb{R}$ (attention : dans cet exercice a et b sont des nombres réels et non des indéterminées). Réduis et indique leur degré.

1) $y^3 3^{-4} x^5 3a^5 y^4 y^3$
2) $(a^2 b^3)^{-5} (5b^3)^2$
3) $3(x^2 y^6)(y^3 x) y^5$
4) $\left[\left(a^{\frac{1}{2}} x^2\right)(3a^2 x)\right]^2$
5) $3a^2 (4x)(a^0)^2$

Partie B. On travaille dans l'algèbre $\mathbb{Q}[x, y]$. Réduis les expressions suivantes en utilisant les identités remarquables. Puis ordonne par rapport à l'indéterminée x et indique le degré.

1) $(x + y)^2$
2) $(2x - 5)^2$
3) $(3 - x) \cdot (3 + x)$
4) $(x + 1)^3$
5) $(2x - 3y)^2$
6) $4x \cdot (x + 2)^2$

Partie C. On travaille dans l'algèbre $\mathbb{Z}[x, y, z]$. Réduis les expressions suivantes en utilisant la distributivité et les identités remarquables, lorsqu'elles s'appliquent. Puis ordonne dans l'ordre croissant et indique le degré du polynôme.

1) $(x + 2) \cdot (x + 5)$
2) $(x + y) \cdot (x - y)$
3) $2x \cdot (y - 3) \cdot (y + 2)$
4) $-5 \cdot (x^2 + x + 2)$
5) $(2x + 1) \cdot (x + 5) \cdot (-x - 2)$
6) $(x + y) \cdot (x + y + z)$
7) $(x^2 + y^2) \cdot (x + y) \cdot (x - y)$
8) $-5x \cdot (x - 2)^2 \cdot x^2$
9) $(x + y + z)^2$
10) $(x + y - z)^2$

Exercice 5

Partie A. Dans les calculs ci-dessous on a réduit les polynômes en plusieurs étapes. Indique pour chaque égalité quelle propriété des anneaux commutatifs a été utilisée (sans oublier quelle opération elle concerne).

1) $x + (5x - 3) = (x + 5x) - 3 = (1 + 5)x - 3 = 6x - 3$

2) $x \cdot (ax) = x \cdot a \cdot x = a \cdot x \cdot x = ax^2$

3) $-x - (-x - x) = -x + x + x = (-1 + 1 + 1)x = 1 \cdot x = x$

4) $25 \cdot 9x \cdot [-2x \cdot (x \cdot 2)] = 25 \cdot 9 \cdot x \cdot (-2) \cdot x \cdot x \cdot 2 = 25 \cdot 9 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x = -900x^3$

5) $(x + 2y - 3) \cdot x - 2x^2 + 3x = x^2 + 2xy - 3x - 2x^2 + 3x = x^2 - 2x^2 - 3x + 3x + 2xy = -x^2 + 2xy$

Partie B. Réduis les polynômes suivants en utilisant dans l'ordre indiqué les propriétés d'associativité (a), de commutativité (c) et de distributivité (d).

1) (a, c) : $25 \cdot (-x) \cdot (2yx) \cdot (-3) \cdot [y^2 \cdot (-x)]$

2) (d, c, d) : $-(2x - 5y + 2) + 5x^2 - 7(x + 2y)$

Exercice 6

Partie A. On travaille avec l'algèbre $\mathbb{Z}[x, y, a, b]$. Réduis les polynômes suivants. Ordonne et indique le degré. Donne la liste des termes de chaque polynôme.

1) $2x + 3y - 5x + 8 - 6y$

2) $19 - 2x^2 + 3x - 20 + 2x^2 - 6x + 3x^3$

3) $y - x - x^2 - y^2 + 3y - 5x + xy$

4) $ab + a^2 - 2b + 3ba + 4a^2b - 2a^2$

Partie B. On travaille avec l'algèbre $\mathbb{Z}[x, y, z, a, b, c]$. Réduis les polynômes suivants. Ordonne globalement, puis par rapport à chaque indéterminée séparément. Indique le degré.

1) $2y^2 + 3x - 5x - 8y + 7xy - x^2y + 8x \cdot 5y$

2) $(3x)^2 - 5yx + 6x^2 - (5x) \cdot (3y) + 2y^2x$

3) $2a^2b - (ab)^2 - 5ab^2 + 2a^2 \cdot 3b^2$

4) $(z^2x)(2x) - (3zx)^2 + (6x^2) \cdot z^2$

5) $ab^2c + 4cb^2a - (2b) \cdot a \cdot 5c \cdot b + 6a^2bc - abc$

Partie C. On travaille dans $\mathbb{R}[x, y, z]$. Ecris le polynôme suivant sous forme réduite, indique son degré et la partie littérale de chaque terme.

$$(x + y^2z)xyz(2x - 2zx) + 2(x^2y^3z^3 - x^2yz)$$

Exercice 7

On travaille dans l'algèbre de polynôme $\mathbb{R}[x, y, z]$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Réduis, ordonne et indique le degré.

1) $(x^2 + 2x - 5) - (3x - 6 + 3x^2)$

2) $(y - 5 + y^2) - (8 + y^2 + y)$

3) $-(z^2 + (3z)^2 - 2.4z + b + \pi z)$

4) $z^3 - (z^4 - (ya)^2 + 3 \cdot (z + y^2))$

5) $y + 2xy - \frac{4}{7}(5x - \frac{3}{27}) - (x + 2.\bar{5})$

Exercice 8

2.2.7. Dans $\mathbb{N}^*$ cherche l'image par la fonction f des nombres 1, 8, 16, 35 et 100 lorsque f est la fonction qui associe à tout nombre entier

1) le nombre qui le suit dans la suite croissante des nombres entiers,

2) son triple,

3) son double diminuée de 1,

4) le plus grand carré parfait (carré d'un nombre entier) qui lui est inférieur ou égal,

5) son ppmc avec 20,

6) le nombre de ses chiffres (écrit en base 10),

7) le plus petit multiple de 7 qui lui est supérieur ou égal.

Donne tes réponses (sans justification) dans un tableau à double entrée avec 5 lignes pour les 5 nombres proposés et 7 colonnes pour les 7 fonctions données.

2.2.8. Même problème pour $f(1), f(8), f(20), f(63)$ et $f(100)$ pour la fonction f qui associe à tout nombre naturel

1) son carré,
2) le reste de la division par 7,
3) le nombre de ses diviseurs,
4) son pgdc avec 60,
5) le plus petit nombre premier qui lui est supérieur,
6) le nombre de ses multiples dans $\mathbb{N}^*$ inférieurs (strictement) à 100,
7) le nombre des nombres premiers qui lui sont inférieurs (strictement).

Exercice 9

1) Soit $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{g, h\}$ deux ensembles. Trouver toutes les fonctions de E dans F (en donnant pour chacune d'elles l'image de *chaque* élément de l'ensemble de départ).
2) Même exercice pour $E = \{a, b\}$ et $F = \{g, h, j\}$.
3) Même exercice pour $E = \{a, b\}$ et $F = \{g, h\}$.
4) Combien existe-t-il de fonctions de E dans F lorsque $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $F = \{g, h\}$? Il n'est pas nécessaire de donner la liste de toutes les fonctions, un argument de comptage (combinatoire) suffit !
5) Même exercice pour $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{g, h, j, k\}$.
6) Même exercice pour $E = \{a, b\}$ et $F = \{g, h, j, k, l, m\}$.