Cours Euler: Corrigé 18

15 janvier 2025

Exercice 1

9.

1) $\sqrt{a^2bc^3} = \sqrt{a^2c^2bc} = \sqrt{a^2c^2}\sqrt{bc} = \sqrt{(ac)^2}\sqrt{bc} = ac\sqrt{bc}$ car $ac > 0$.

2) $\sqrt{\frac{a^5}{b^2}c^3} = \sqrt{\frac{a^4}{b^2}ac^2c} = \sqrt{\frac{a^4}{b^2}c^2}\sqrt{ac} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{b}c\right)^2}\sqrt{ac} = \frac{a^2c}{b}\sqrt{ac}$ car $\frac{a^2c}{b} > 0$.

3) $\sqrt{a^3b^3c^4} = \sqrt{a^2b^2c^4ab} = \sqrt{a^2b^2c^4}\sqrt{ab} = abc^2\sqrt{ab}$.

4) $\sqrt{a^2\frac{a^3b^4}{b^3}c^2} = \sqrt{a^5bc^2} = \sqrt{a^4c^2ab} = a^2c\sqrt{ab}$.

10.

1) $\sqrt{a^4b^2}$ existe toujours.
$\sqrt{a^4b^2} = \sqrt{a^4}\sqrt{b^2} = \sqrt{(a^2)^2}\sqrt{b^2} = \left(\sqrt{a^2}\right)^2\sqrt{b^2} = a^2|b|$

2) $\sqrt{a^7b^3}$ existe si a et b sont tous les deux positifs, tous les deux négatifs (ou si l'un des deux est nul).
$\sqrt{a^7b^3} = \sqrt{a^6b^2}\sqrt{ab} = |b|\sqrt{(a^2)^3} = |b|\left(\sqrt{a^2}\right)^3\sqrt{ab} = |a|^3|b|\sqrt{ab} = |a^3b|\sqrt{ab}$

3) $\sqrt{\frac{a^3}{b^4}}$ existe si a est positif et b non nul.
$\sqrt{\frac{a^3}{b^4}} = \sqrt{\frac{a^2}{b^4}a} = \frac{a}{b^2}\sqrt{a}$
Noter qu'ici on a bien $\sqrt{a^2} = a$ car l'expression donnée existe seulement si a est positif.

4) $\sqrt{a^3b^4}$ existe si a est positif ou si l'un des deux nombres a ou b est nul.
$\sqrt{a^3b^4} = \sqrt{a^2b^4}\sqrt{a} = ab^2\sqrt{a}$ car ab^2 est positif.

Exercice 2

1) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) $\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

3) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{12}{2}} = \sqrt{6}$

4) $\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{5\cdot 2}{2\cdot 2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

5) $\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(5-\sqrt{2})\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}-2}{2}$

6) $$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \sqrt{2}-1\,;$$

7) $$\frac{19\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} = \frac{19\sqrt{5}\left(2-\sqrt{5}\right)}{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)} = \frac{19\sqrt{5}\left(2-\sqrt{5}\right)}{4-5} = \frac{19\cdot\left(2\sqrt{5}-5\right)}{-1} = 95-38\sqrt{5}.$$

Exercice 3

1. $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ et $4+3=7$ donc $\sqrt{16+9} < 4+3$
2. Pour comparer les deux expressions, mettons-les au carré : $\left(\sqrt{25+5}\right)^2 = \left(\sqrt{30}\right)^2 = 30$
   $\left(5+\sqrt{5}\right)^2 = 25+10\sqrt{5}+5 = 30+10\sqrt{5} > 30$
   Donc $\sqrt{25+5} < 5+\sqrt{5}$
3. Pour comparer les deux expressions, mettons-les au carré : $\left(\sqrt{8+3}\right)^2 = 11$
   $\left(\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)^2 = 8+3+2\sqrt{8\cdot 3} = 11+4\sqrt{6} > 11$
   Donc $\sqrt{8+3} < \sqrt{8}+\sqrt{3}$
4. $\sqrt{a^2+b^2}$ est la longueur de l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont les côtés sont de longueur a et b. Puisque cette hypothénuse est de longueur inférieure à $a+b$, alors $\sqrt{a^2+b^2} < a+b$.
   Algébriquement, si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2+b^2 < a^2+b^2+2ab = (a+b)^2$. Vu que $\sqrt{a^2+b^2}$ et $a+b$ sont des nombres positifs, on conclut que $\sqrt{a^2+b^2} < a+b$.
5. $\sqrt{a^2+0} = a+0$ et $\sqrt{b^2+0} = b+0$.
   Pour comparer $\sqrt{a^2+b^2}$ avec $|a|+|b|$, on élève au carré :
   $\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2+b^2$ et $(|a|+|b|)^2 = a^2+b^2+2|a||b| \geq a^2+b^2$. Donc $\sqrt{a^2+b^2} \leq |a|+|b|$.
   Mais nous ne pouvons pas comparer $\sqrt{a^2+b^2}$ avec $a+b$ lorsque a et b sont des réels (donc pas forcément positifs). Par exemple, avec $a=-1$ et $b=1$: $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2} > a+b = 0$ et avec $a=b=1$: $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2} < a+b = 2$.
6. Comme nous l'avons vu avant : $\sqrt{a^2+b^2} \leq |a|+|b|$. De plus $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2} = |a|+|b|$, $a+b \leq |a|+|b|$.

Exercice 4

13.

1) $\sqrt{81} = 9$
2) $\sqrt[3]{27} = 3$
3) $\sqrt[3]{-125} = -5$
4) $-\sqrt[3]{8} = -2$
5) $\sqrt[4]{16^2} = \sqrt[4]{4^4} = 4$
6) $\sqrt[3]{8^{-1}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^{-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
7) $\sqrt[6]{4^{-9}} = \left(\sqrt[6]{4^9}\right)^{-1} = \left(\sqrt[2]{4^3}\right)^{-1} = \left(\sqrt[2]{2^6}\right)^{-1} = \left(2^3\right)^{-1} = \frac{1}{8}$
8) $\sqrt[3]{-2^6} = -\sqrt[3]{2^6} = -2^2 = -4$

14.

1) $\sqrt[3]{-65} = -4,02$
2) $\sqrt[3]{\pi} = 1,46$
3) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = 1,31$
4) $\sqrt[3]{\sqrt{456}} = 2,77$
5) $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}} = -0,90$
6) $\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1,34$

15.

1) $\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3^7} = \sqrt[3]{9\cdot 3^7} = \sqrt[3]{27\cdot 3^6} = 3\cdot 3^2 = 27$
2) $\sqrt[3]{16}\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{16\cdot 32} = \sqrt[3]{4^2\cdot 4\cdot 8} = \sqrt[3]{4^3\cdot 2^3} = 4\cdot 2 = 8$
3) $\sqrt[3]{a^4}\sqrt[3]{a^5} = \sqrt[3]{a^4a^5} = \sqrt[3]{a^9} = a^3$
4) $\frac{\sqrt[3]{2^4}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{2^4}{2}} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

16.

1) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} = \frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{2}$
2) $\frac{1}{\sqrt[3]{25}} = \frac{\left(\sqrt[3]{25}\right)^2}{\sqrt[3]{25}\left(\sqrt[3]{25}\right)^2} = \frac{\left(\sqrt[3]{25}\right)^2}{25}$
3) $\frac{1}{\sqrt[5]{4}} = \frac{\left(\sqrt[5]{4}\right)^4}{\sqrt[5]{4}\left(\sqrt[5]{4}\right)^4} = \frac{\left(\sqrt[5]{4}\right)^4}{4}$
4) $\frac{1}{\sqrt[4]{27}} = \frac{\left(\sqrt[4]{27}\right)^3}{\sqrt[4]{27}\left(\sqrt[4]{27}\right)^3} = \frac{\left(\sqrt[4]{27}\right)^3}{27}$
5) $\frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{5}\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} = \frac{\sqrt[3]{5}\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{2}$
6) $\frac{\sqrt[3]{72}}{\sqrt[3]{9}} = \sqrt[3]{8} = 2$

17.

Ici on utilise les formules $(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3ba^2 + b^3$ et $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$ où x est un nombre positif, $n \in \mathbb{N}_0$ et $m \in \mathbb{N}$.

1) $(\sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{4}$ et $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$

2) $\left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{25}{16}}$ et $\left(\sqrt[3]{\frac{5}{4}}\right)^3 = \frac{5}{4}$

3) $(\sqrt[3]{3}+1)^2 = \sqrt[3]{9} + 2\sqrt[3]{3} + 1$
$(\sqrt[3]{3}+1)^3 = 3+3\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{9}+1 = 4+3\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{9}$

4) $(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})^2 = \sqrt[3]{9} - 2\sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}$
$(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})^3 = 3 + 3\sqrt[3]{3\cdot 4} - 3\sqrt[3]{9\cdot 2} - 2 = 1 + 3\sqrt[3]{12} - 3\sqrt[3]{18}$

18.

1) $\sqrt{\sqrt{a^2}} = \sqrt{|a|}$ existe toujours.

2) $\sqrt[3]{\sqrt{b^2}} = \sqrt[3]{|b|}$ existe toujours.

3) $\sqrt{\sqrt[3]{b^2}} = \sqrt[3]{\sqrt{b^2}} = \sqrt[3]{|b|}$ existe toujours.

4) $\sqrt{\sqrt[3]{-a^2}} = \sqrt{-\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{-\left(\sqrt[3]{a}\right)^2}$ existe seulement pour $a = 0$.

19.

1) $\sqrt[3]{4}\sqrt{2}$ est déjà sous sa forme la plus simple.

2) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt[4]{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}(\sqrt[4]{3})^3}{\sqrt[4]{3}(\sqrt[4]{3})^3} = \dfrac{3\sqrt{3}\sqrt[4]{27}}{3} = \sqrt{3}\sqrt[4]{27} = 3\sqrt[4]{3}$

Exercice 5 (Optionnel)

1$^{\text{ière}}$ série

1) $\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}} \approx 1.913$

2) $\sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8} = 8^{\frac{1}{5}} \approx 1.516$

3) $\sqrt[7]{-3^2} = \sqrt[7]{-9} = (-9)^{\frac{1}{7}} \approx -1.369$

4) $\sqrt[7]{(-3)^2} = \sqrt[7]{9} = 9^{\frac{1}{7}} \approx 1.369$

5) $\sqrt[6]{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{3^{-1}} = 3^{-\frac{1}{6}} \approx 0.833$

6) $\sqrt[7]{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{7}} = (2^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{7}} = 2^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}} = 2^{-\frac{1}{14}} \approx 0.952$

2$^{\text{ième}}$ série

1) $(2+\frac{1}{7})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{14+1}{7}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{15}{7}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1.464$

2) $3^{\frac{1}{4}} - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{4}} - \frac{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\frac{1}{4}} - \frac{2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\frac{1}{4}} - \frac{2^{\frac{1}{6}}}{3^{\frac{1}{3}}} \approx 0.538$

3) $\sqrt{(2+3)^{\frac{1}{3}}} = \sqrt{5^{\frac{1}{3}}} = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{6}} \approx 1.308$

4) $\sqrt{2^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}} = \left(2^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1.644$

3$^{\text{ième}}$ série

1) $a + b\sqrt[3]{c} \approx -1.227$

2) $(a+b)\,\sqrt[3]{c} \approx -1.763$

3) $(a+b)^{\frac{1}{2}}\,c^{\frac{1}{3}} \approx -1.241$

4) $\left[(a+b)\cdot c^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}$ = nan (« not accepted number ») ceci signifie qu'on demande à la calculatrice de calculer une valeur qui n'existe pas (par exemple $\sqrt{-2}$). Ici $(a+b)\cdot c^{\frac{1}{3}}$ est un nombre négatif. La calculatrice peut aussi afficher “error” à la place de “nan”.

5) $\sqrt{a + b^{\frac{1}{2}}} \approx 1.266$

6) $\left(\sqrt{a+b}\right)^4 \approx 4.071$

7) $(a+b+c)^{\frac{1}{2}} \approx 1.162$

8) $\left(\frac{a}{b+c}\right)^{-\frac{2}{3}} \approx 2.405$

Exercice 6

Partie A.

(a) $3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 3^{\frac{4}{2}} = 3^2 = 9$

(b) $7^{\frac{5}{2}} \cdot 7^{-\frac{3}{2}} = 7^{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}} = 7^{\frac{2}{2}} = 7^1 = 7$

(c) $6^{\frac{1}{4}} \cdot 6^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{-\frac{3}{4}} = 6^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} = 6^{\frac{1+2-3}{4}} = 6^0 = 1$

(d) $\frac{2^{\frac{7}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} = 2^{\frac{7}{2}-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4$

(e) $\frac{27^{\frac{4}{3}}}{27^{\frac{2}{3}}} = 27^{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}} = 27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^2 = 9$

(f) $(-27)^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-1} = (-3^3)^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-1} = (-3)^2 \cdot 3^{-1} = 3^2 \cdot 3^{-1} = 3^{2-1} = 3$

Partie B.

(a) $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[7]{a} = a^{\frac{1}{7}}, \quad \sqrt{a^7} = a^{\frac{7}{2}}, \quad \sqrt{a^2} = |a| = a$

(b) $\sqrt[3]{a^3} = a, \quad \sqrt[3]{a^9} = a^3, \quad \sqrt[4]{a^{12}} = a^3, \quad \sqrt[4]{a^{18}} = a^{\frac{9}{2}}$

(c) $\sqrt{a^0} = 1, \quad \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt[4]{a^4}} = \frac{a}{a} = 1, \quad \sqrt[3]{\frac{1}{a}} = a^{-\frac{1}{3}}, \quad \frac{\sqrt[16]{a^8}}{\sqrt[7]{a^{28}}} = \frac{\sqrt{a}}{a^4} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-4} = a^{-\frac{7}{2}}$

(d) $\sqrt{\frac{a^3}{a^6}}a^{-\frac{3}{2}}, \quad \sqrt[8]{\frac{a^{24}}{a^{12}}} = a^{\frac{3}{2}}, \quad \left(\sqrt[7]{a^6}\right)^2 = a^{\frac{12}{7}}$

(e) $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}, \quad \sqrt[3]{a^{2n}} = a^{\frac{2n}{3}}, \quad \sqrt[3m]{a^{6n}} = a^{\frac{2n}{m}},$

(f) $\frac{a^n}{\sqrt[m]{a^0}} = a^n, \quad \sqrt[2m]{\frac{a^{3n}}{a^{2n}}} = a^{\frac{n}{2m}} \quad \frac{\sqrt[8m]{a^{2n}}}{\sqrt[3m]{a^n}} = a^{\frac{n}{4m}-\frac{n}{3m}} = a^{-\frac{n}{12m}}$

Partie C.

(a) $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}, \quad a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3}, \quad a^{\frac{7}{1}} = a^7$

(b) $a^{\frac{4}{6}} = \sqrt[3]{a^2}, \quad a^{\frac{16}{12}} = \sqrt[3]{a^4}, \quad a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$

(c) $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}, \quad a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}, \quad a^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a}}$

(d) $a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}, \quad a^{\frac{2n}{6m}} = \sqrt[3m]{a^n}$

Exercice 7

(a) Tout d'abord $|x|$ est positif. De plus, $(|x|)^n = x^n$ vu que n est pair. Donc $\sqrt[n]{x^n} = |x|$.
(b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $n, p \in \mathbb{N}_0$.
Propriété (2) : Supposons que $y \neq 0$ et ($x, y \geq 0$ ou n impair). Alors, les racines n-ièmes de x, y et $\frac{x}{y}$ existent. De plus, tous les quotients existent. Maintenant,

$$\left(\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{x})^n}{(\sqrt[n]{y})^n} = \frac{x}{y}$$

par la propriété (3) des puissances entières et la définition de la racine n-ième. Donc, si n est impair, nous avons montré que $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$. Si n est pair, notons que $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ est positif et concluons que $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$.

Propriété (5) : Supposons que $x \geq 0$ ou (n et p impairs). Alors, les racines $\sqrt[n]{x}$, $\sqrt[p]{x}$ et $\sqrt[n \cdot p]{x^{n+p}}$ existent car $n \cdot p$ est impair si n et p impair. Par les propriétés (i) et (iv) des puissances entières on a

$$\left(\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[p]{x}\right)^{np} \overset{(i)}{=} \left(\sqrt[n]{x}\right)^{np} \cdot \left(\sqrt[p]{x}\right)^{np} \overset{(iv)}{=} \left(\left(\sqrt[n]{x}\right)^n\right)^p \cdot \left(\left(\sqrt[p]{x}\right)^p\right)^n,$$

ce qui égale $x^p \cdot x^n$ par la définition de la racine. Comme $x^{n+p} = x^p \cdot x^n$ et comme $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[p]{x}$ est positif au cas où x est positif, nous concluons que $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[p]{x} = \sqrt[n \cdot p]{x^{n+p}}$.

(c) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$ tels que $\left(\dfrac{x}{y}\right)^r$, x^r et y^r sont définis. Choisissons un nombre entier a et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $r = \dfrac{a}{n}$. Pour que l'on puisse diviser par y^r, il faut que $y \neq 0$. On suppose aussi que soit x et y sont positifs, soit n est impair. De plus, $x \neq 0$ si $a < 0$. Calculons

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x}{y}\right)^r = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{a}{n}} &= \sqrt[n]{\left(\frac{x}{y}\right)^a} && \text{définition de la puissance rationnelle}\\
&= \sqrt[n]{\frac{x^a}{y^a}} && \text{propriété (2) des puissances entières}\\
&= \frac{\sqrt[n]{x^a}}{\sqrt[n]{y^a}} && \text{propriété (2) des racines}\\
&= \frac{x^r}{y^r} && \text{par définition des puissances rationnelles}
\end{aligned}$$

En effet les propriétés des puissances et des racines s'appliquent puisque les conditions sont satisfaites.

Exercice 8

Dans cet exercice, toutes les expressions avec des puissances rationnelles sont bien définies car le nombre a est supposé strictement positif.

20.

1) $a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} = a^{\frac{2+3}{4}} = a^{\frac{5}{4}}$
   Sans exposant négatif, ni fractionnaire :
   $a^{\frac{5}{4}} = (\sqrt[4]{a})^5 = a\sqrt[4]{a}$
2) $(a^{-\frac{1}{2}})^2 = a^{-1}$
   Sans exposant négatif, ni fractionnaire :
   $a^{-1} = \frac{1}{a}$
3) $a^{-\frac{1}{2}} a^2 = a^{2-\frac{1}{2}} = a^{\frac{4-1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$
   Sans exposant négatif, ni fractionnaire :
   $a^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{a})^3 = a\sqrt{a}$
4) $\left(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{2+1}{3}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$
   Sans exposant négatif, ni fractionnaire :
   $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$
5) $a^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{-\frac{3}{6}+\frac{2}{6}} = a^{-\frac{1}{6}}$
   Sans exposant négatif, ni fractionnaire :
   $a^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{a}}$
6) $\left(\frac{2}{a^{-\frac{1}{2}}}\right)^3 = 2^3 \cdot (a^{\frac{1}{2}})^3 = 8 \cdot a^{\frac{3}{2}}$
   Sans exposant négatif, ni fractionnaire :
   $8 \cdot a^{\frac{3}{2}} = 8 \cdot (\sqrt{a})^3 = 8a\sqrt{a}$
7) $a^{1.25} a^{1.50} = a^{1.25+1.50} = a^{2.75}$
   Notons que $2.75 \cdot 4 = 11$ donc $2.75 = \frac{11}{4}$, donc cette expression sans exposant négatif, ni fractionnaire, est :
   $a^{2.75} = a^{\frac{11}{4}} = \sqrt[4]{a^{11}} = a^2\sqrt[4]{a^3}$
8) $\left(a^{-\frac{1}{4}}\right)^{-2} \left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{-1} = a^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} = a^{-\frac{1}{4}}$
   Sans exposant négatif, ni fractionnaire :
   $a^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a}}$

21.

1) $\sqrt[3]{a^2}\sqrt{a} = a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{4}{6}+\frac{3}{6}} = a^{\frac{7}{6}}$
   Sans exposant négatif, ni fractionnaire :
   $a^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{a^7} = a\sqrt[6]{a}$
2) $\sqrt[4]{a^2}\sqrt[3]{a} = a^{\frac{2}{4}} a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{6}+\frac{2}{6}} = a^{\frac{5}{6}}$
   Sans exposant négatif, ni fractionnaire :
   $a^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{a^5}$

3) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}} = (a \cdot a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}}$
Sans exposant négatif, ni fractionnaire :
$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

4) $\frac{\sqrt[3]{a}\sqrt{a^3}}{\sqrt[6]{a^5}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{5}{6}}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-\frac{5}{6}} = a^{\frac{2+9-5}{6}} = a^{\frac{6}{6}} = a^1 = a$
Cette expression est déjà sans exposant négatif, ni fractionnaire.

5) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{a^2}} = (a^{\frac{1}{2}-2})^{\frac{1}{3}} = (a^{-\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{2}}$
Sans exposant négatif, ni fractionnaire :
$a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$

6) $\left(\frac{\sqrt[3]{a^{-1}}}{a\sqrt{a^{-2}}}\right)^3 = \left(\frac{a^{-\frac{1}{3}}}{a \cdot a^{-\frac{2}{2}}}\right)^3 = (a^{-\frac{1}{3}})^3 = a^{-1}$
Sans exposant négatif, ni fractionnaire :
$a^{-1} = \frac{1}{a}$

7) $\frac{27a^{-2}\sqrt{a^4}}{64\sqrt{a\sqrt{a}}} = \frac{27a^{-2}a^2}{64a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{4}}} = \frac{27}{64a^{\frac{3}{4}}} = \frac{27}{64}a^{-\frac{3}{4}}$
Sans exposant négatif, ni fractionnaire :
$\frac{27}{64}a^{-\frac{3}{4}} = \frac{27}{64\sqrt[4]{a^3}}$

Exercice 9

1) Faux : avec $a = -1$ et $b = 0$, on a $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} = 1$ et $a + b = -1$
2) Vrai : $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right) = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a - b$. La première égalité est l'identité remarquable

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

3) Vrai : $\sqrt[n]{x^{3n}} = (x^{3n})^{\frac{1}{n}} = x^3$ car $x \geq 0$.
4) Vrai : $\sqrt[4]{2^2} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}}$
5) Faux : $\sqrt[6]{(-2)^2} = (2^2)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}}$ et $\sqrt[3]{-2} = -2^{\frac{1}{3}}$. Ici on ne peut pas simplifier la puissance 2 avec la racine 6 pour obtenir une racine troisième, car le nombre sur lequel s'appliquent les opérations est négatif (-2). Remarque que tu ne peux pas sortir la puissance de la racine sixième dans la première expression, car alors tu aurais une racine paire d'un nombre négatif.
6) Vrai : $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$

Exercice 10

Monômes.

a.

monôme	coefficient	partie littérale	degré
$-5x$	-5	x	1
$2z^3$	2	z^3	3
$\frac{9}{2}y^8$	$\frac{9}{2}$	y^8	8
$-0{,}02$	$-0{,}02$	aucun	0
m^4	1	m^4	4
$3x^2yz$	3	x^2yz	4
$\frac{ab}{2}$	$\frac{1}{2}$	ab	2

b. Les monômes $5x$ et $\dfrac{x}{2}$ sont semblables. Les monômes $\dfrac{9}{2}y^3$ et $\sqrt{2}y^3$ également.

c.
1. $4a \cdot 3 = 4 \cdot 3 \cdot a = 12a$
2. $12x \cdot 2x = 12 \cdot x \cdot 2 \cdot x = 12 \cdot 2 \cdot x \cdot x = 24x^2$
3. $z \cdot u = zu$
4. $4z \cdot 1{,}5 \cdot 2z = 4 \cdot z \cdot 1{,}5 \cdot 2 \cdot z = 4 \cdot 1{,}5 \cdot 2 \cdot z \cdot z = 12z^2$
5. $-10x \cdot (-10x) \cdot (-10) = -10 \cdot x \cdot (-10) \cdot x \cdot (-10) = (-10) \cdot (-10) \cdot (-10) \cdot x \cdot x = -1000x^2$

6. $y \cdot y \cdot 4z = y \cdot y \cdot 4 \cdot z = 4 \cdot y \cdot y \cdot z = 4y^2z$

Exercice 11

Le premier carré est magique pour l'addition. Il suffit de calculer la somme des polynômes de chaque ligne, de chaque colonne et des deux diagonales. On trouve dans tous les cas $6x$. Pour travailler systématiquement on peut calculer le terme de degré 1 et celui de degré 0 de chaque somme.
Le deuxième n'est pas magique. La diagonale principale donne $3x + 10$ comme somme alors que la première ligne donne $3x + 12$.

Le premier carré est formé de monômes de coefficient 1. Il suffit donc de sommer les degrés de chacun pour vérifier qu'il est magique. On trouve x^9 comme produit.
On voit immédiatement que le second n'est pas magique pour la multiplication puisque le produit de la troisième ligne donne $4x^3$ alors que le produit de la première donne $4x^3 + 4x^2$.

Exercice 12 (Optionnel)

Cet exercice est le sujet d'un document séparé.